

Томский государственный университет  
Механико-математический факультет

**Научная студенческая конференция  
механико-математического факультета**

Сборник тезисов конференции

12 – 19 апреля 2011 года

Томск – 2011

Редакционная коллегия  
доцент В.Н. Берцун  
доцент Н.Н. Богословский

Научная конференция студентов и молодых ученых  
механико-математического факультета Томского государственного университета, посвященная 50-летию полета в космос Ю.А. Гагарина: Сборник тезисов конференции (Томск, 12 – 19 апреля 2011 г.) – Томск: Томский государственный университет, 2011 г. - 109 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

### СЕКЦИЯ «АЛГЕБРА»

|   |    |
|---|----|
| <b>Бородин А. А.</b> Возможные перспективы алгебраических атак на шифр AES.....                   | 8  |
| <b>Гердт М.В.</b> О некотором обобщении сингулярного идеала и сингулярного подмодуля.....         | 9  |
| <b>Евдокименко В.Г.</b> Сервантные и слабосервантные подгруппы.....                               | 10 |
| <b>Кевролева К.В.</b> Алгоритм целочисленной факторизации на эллиптических кривых.....            | 11 |
| <b>Горбунов Е.С., Ковалёва Т.Л.</b> Квантовые компьютеры.....                                     | 12 |
| <b>Милютченко С.В.</b> Логические исчисления.....   | 14 |
| <b>Сорокин К.С.</b> Прямые суммы циклических абелевых групп с чистыми кольцами эндоморфизмов..... | 14 |

### СЕКЦИЯ «ГЕОМЕТРИЯ»

|  |    |
|--|----|
| <b>Камчатный С.А.</b> Математическая модель процесса сближения двух поверхностей в пространстве..... | 16 |
| <b>Тарновская Е. П.</b> Хроматическое число. Трёхмерный случай.....                                  | 17 |

### СЕКЦИЯ «ГИДРОМЕХАНИКА»

|  |    |
|--|----|
| <b>Гусев С.И.</b> Сравнительный анализ различных подходов к решению плоской задачи теплопроводности.....     | 19 |
| <b>Диль Д.О.</b> Математическое моделирование упругого контактирования двух гуковских тел сложной формы..... | 20 |

### СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

|   |    |
|---|----|
| <b>Анциферова Е.В.</b> Теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши.....                | 23 |
| <b>Васильева О.В.</b> Статистический анализ временных рядов.....  | 24 |
| <b>Дериглазова И.А.</b> Вклад Леонардо Эйлера в математический анализ.....                              | 25 |
| <b>Колесников И. А.</b> Исследование отображения на круговой счетно-угольник с симметрией переноса..... | 26 |
| <b>Молчанова Н. В.</b> Приемы разложения в ряд Тейлора и исследование этих разложений.....              | 28 |
| <b>Пчелинцев В.А.</b> Об области значений функционала в задаче о неналегающих областях.....             | 28 |
| <b>Чернодубова К. С.</b> Числа Фибоначчи и другие рекуррентные последовательности.....                  | 30 |
| <b>Шелковникова М.Г.</b> Отображение с симметрией переноса.....   | 31 |
| <b>Шишкова А.А.</b> Об одном совершенном семействе множеств.....  | 32 |

|  |    |
|--|----|
| <b>Чуриков В.А.</b> Экспоненты дробного анализа целочисленного порядка 3 .....   | 33 |
| <b>Чуриков В.А.</b> Гиперболические функции дробного анализа целочисленного порядка 3 .....  | 35 |
| <b>Чуриков В.А.</b> Тригонометрические функции дробного анализа целочисленного порядка 3 .....   | 37 |
| <b>СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ»</b>   |    |
| <b>Бахметьев А.В.</b> Задача сверхзвукового обтекания затупленного тела .....  | 40 |
| <b>Бузаев С.С.</b> Методы численного интегрирования и их применение к расчету функции пропускания.....   | 41 |
| <b>Сивков А.А., Исаев Ю.Н., Герасимов Д.Ю., Васильева О.В.</b> Моделирование коаксиальной схемы магнитоплазменного ускорителя на основе электротехнической схемы замещения ..... | 42 |
| <b>Горкун Д.А.</b> Исследование возможности применения метода SVM при прогнозировании свойств нано-пленок .....  | 43 |
| <b>Громова В.В.</b> Численное моделирование процессов самоочищения реки Томи с учетом характеристик течения .....  | 44 |
| <b>Гронская А.А.</b> Модифицированный попеременно-треугольный метод решения третьей краевой задачи для уравнения эллиптического типа .....                                       | 45 |
| <b>Губская М.М.</b> Вейвлет-методы скоростного проектирования ремонтов автомобильных дорог .....   | 46 |
| <b>Деги Д.В.</b> Численное решение задачи о движение жидкости в каверне на компьютерах с параллельной архитектурой .....   | 47 |
| <b>Дербышев П. А.</b> Численный метод решения задачи сопряжённого теплообмена в двумерной постановке на многоядерной системе с общей памятью .....                               | 49 |
| <b>Дороцук Е.В., Абеляшев Д.Г.</b> Численное исследование математических моделей биологической очистки сточных вод.....  | 50 |
| <b>Дучко А.Н.</b> Метод динамической адаптации и его применение для решения некоторых задач газовой динамики.....  | 51 |
| <b>Зоркальцева М. Ю.</b> Исследование многоугольных чисел с помощью сис-темы .....   | 52 |
| <b>Иванов А.С.</b> Исследование криптографических свойств стандарта AES.....   | 53 |
| <b>Ирискина Е.Н.</b> Математическое моделирование аэродинамики в помещении для различных схем отвода и подвода воздуха.....  | 55 |

|  |    |
|--|----|
| <b>Кондратюк С.В.</b> Разностные схемы на графах .....   | 56 |
| <b>Кононенко А.А.</b> Исследование сходимости интерполяционного процесса на адаптивных сетках .....  | 58 |
| <b>Косова О.Н.</b> Построение эрмитового кубического сплайна на основе базисных функций .....  | 59 |
| <b>Кошкина А.А.</b> Численное решение систем линейных уравнений методом сопряженных градиентов .....   | 60 |
| <b>Логинова Д.С.</b> Трехмерное моделирование деформации и разрушения хрупких пористых материалов .....  | 61 |
| <b>Максимов Г. А.</b> Визуализация распределения простых чисел и Гипотезы Римана .....   | 62 |
| <b>Новосельцева О.В.</b> Применение метода сопряженных градиентов с квазиньютоновской аппроксимацией .....   | 63 |
| <b>Пауль Ю.А.</b> Изучение математических моделей вирусного заболевания с применением численных методов .....  | 64 |
| <b>Султонова Ш.Х.</b> Математические модели усиления иммунного ответа .....  | 65 |
| <b>Тажыйма С.У.</b> Разностная схема повышенного порядка точности для уравнения параболического типа .....   | 67 |
| <b>Толмачев К.Ю.</b> Дескрипторы цифрового изображения и их использование для кластеризации видеосцен .....  | 68 |
| <b>Федотова Е. Е.</b> Математическое моделирование поискового поведения хищника .....  | 69 |
| <b>Юнышев А.А.</b> Численное решение нестационарных конвективно-диффузионных уравнений на адаптивных сетках с использованием графических процессоров ..... | 70 |
| <b>СЕКЦИЯ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»</b>  |    |
| <b>Афонина Ю.М.</b> Оценка основных параметров страховой деятельности для страхования имущества .....  | 72 |
| <b>Груне К.А.</b> Исследование социального положения детей и подростков, оставшихся без попечения родителей .....  | 73 |
| <b>Дарханов А.В.</b> Задача о разорении игрока. Оптимальная стратегия игры в рулетку .....   | 74 |
| <b>Иванюк Ю.В.</b> Статическое оценивание уровня льготного лекарственного обеспечения Томска и томской области .....                                       | 74 |
| <b>Ильина Ю.В.</b> Исследование семейного положения населения города Томска .....  | 76 |
| <b>Карпова Т.В.</b> Оптимальная интерполяция поля вывала в районе Тунгусского явления .....  | 77 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Лунышина И.В.</b> Системы одновременных уравнений .....   | 78  |
| <b>Мурзина Е.А.</b> Системы одновременных уравнений. Модель мультипликатора-акселератора .....   | 79  |
| <b>Смирнов А.Е.</b> Задача оптимального потребления и инвестирования для модели Блэка-Шоулса .....   | 80  |
| <b>Травкина В.В.</b> Оптимальное резервирование по критерию среднего времени безотказной работы .....  | 81  |
| <b>Фролова А.В.</b> Выделение тренда временного ряда при случайном числе данных в моменты измерений .....  | 82  |
| <b>Шелехова М.А.</b> Экзотические однобарьерные опционы .....  | 84  |
| <b>СЕКЦИЯ «ТОПОЛОГИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»</b>  |     |
| <b>Демидова И.Ю.</b> Дополняемые подпространства в пространстве $Sr(x)$ .....  | 86  |
| <b>Жанугулова В.А.</b> Пространство функций 1-го класса Бэра .....   | 87  |
| <b>Каргин Д.И.</b> Об одном свойстве пространства $l_1$ .....  | 88  |
| <b>Овчинникова Ю.С.</b> Двойственность Понтрягина-ван Кампена для свободных $\pi$ -периодических топологических групп .....                                      | 88  |
| <b>Паньковская Е.А.</b> .....  | 90  |
| <b>Полухина А.В.</b> Некоторые свойства выпуклых множеств .....  | 91  |
| <b>Строчкова Т. А.</b> Банахово пространство, содержащее $l_1$ .....   | 92  |
| <b>Сухачева Е.С.</b> Различные виды независимостей в банаховых пространствах .....   | 94  |
| <b>Трофименко Н.Н.</b> .....   | 95  |
| <b>Чимитова Д.Д.</b> .....   | 96  |
| <b>СЕКЦИЯ «ФИЗИЧЕСКАЯ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА»</b>   |     |
| <b>Байгулова А.И.</b> Математическое моделирование структуры течения турбулентного закрученного потока в канале со вдувом ...                                    | 98  |
| <b>Белоусова А.О.</b> Теоретическое и экспериментальное исследование тепловых смерчей .....  | 99  |
| <b>Вильмс В.С.</b> Математическое моделирование возникновения и распространения степных пожаров в двумерной постановке .....                                     | 100 |
| <b>Гладкий Д.А.</b> О математическом моделировании испарения воды из слоя торфа .....  | 101 |
| <b>Дроздов Я.А.</b> Огненные смерчи .....  | 102 |
| <b>Караваяев В.В.</b> Экспериментальное исследование возникновения и распространения степного пожара и анализ характеристик пламени фронта степного пожара ..... | 103 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Касымов Д. П.</b> Экспериментальные и теоретические исследования зажигания торфа от низового лесного пожара .....             | 104 |
| <b>Краснов А.А.</b> Тепломассообмен стенки и высокотемпературного газа при наличии вдува жидкости через пористые материалы ..... | 106 |
| <b>Матвеев И.В.</b> Исследование влияния акустических колебаний на устойчивость теплового смерча.....                            | 107 |
| <b>Попова А.В.</b> Численное моделирование кристаллизации сферической капли в веерном радиально-коническом сопле .....           | 108 |
| <b>Пахомов Ф.М., Репало Е.Н.</b> Аэродинамика колеблющегося конуса в набегающем сверхзвуковом потоке .....                       | 109 |

## СЕКЦИЯ «АЛГЕБРА»

### Возможные перспективы алгебраических атак на шифр AES.

**Бородин А.А.**

**Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Росошек С. К.**

Томский государственный университет

E-mail: [bor\\_fies@mail.ru](mailto:bor_fies@mail.ru)

В современном мире вопросы безопасности информационных и компьютерных систем приобретают всё большее значение. Переход на электронный документооборот и безопасность личных данных при работе в Internet требуют повышенного внимания к выбору надежного алгоритма шифрования. Одним из самых известных шифров, имеющий аппаратную и программную реализацию практически во всех технологических и информационных продуктах зарубежного производства, является шифр AES.

AES является блочным симметричным шифром с длиной ключа от 128 до 256 бит. По мнениям экспертов, он надежно защищен от дифференциального и линейного криптоанализа, однако беспокойство вызывает простая алгебраическая структура данного алгоритма. Каждый раунд состоит из следующих операций: обращение байта, как полинома в поле Галуа  $GF(2^8)$ , различного рода перемешиваний бит и байтов, матричного умножения и добавления ключа. Однако, результат шифрования каждого бита можно свести к полиному Жегалкина. В частности, для представления операции поиска обратного элемента в поле Галуа потребуется многочлен из 128 членов.

Используя символьные вычисления в математических пакетах с поддержкой функций высшего порядка, теоретически представляется возможным составить систему из 128 булевых уравнений относительно ключа, выбрав избранный открытый и шифр тексты. На ее примере можно будет показать возможность или невозможность алгебраического взлома AES путем булевого представления последнего.



## О некотором обобщении сингулярного идеала и сингулярного подмодуля

Гердт М.В.

Научный руководитель: доцент, к. ф. – м. н. Мисяков В. М.

Томский государственный университет

E-mail: gerdt\_marina@mail.ru

Через  $R$  будем обозначать ассоциативное кольцо с единицей,  $I$  - двусторонний идеал в  $R$  такой, что  $I \neq R$  и  $x \in R$ .

**Определение.** Правый идеал  $I(x) = \{y \in R \setminus I \mid xy \in I\} \cup \{0\}$  будем называть правым  $I$ -аннулятором элемента  $x \in R$ .

Множество  $R_I(I) = \{x \in R \mid I(x) \cap B \neq \emptyset\}$  для любого правого идеала  $B$  такого, что  $B \not\subseteq I$ , будем называть достаточно  $I$ -сингулярным идеалом кольца  $R$ .

**Определение.** Правый идеал  $MI(m) = \{x \in R \setminus I \mid mx \in MI\} \cup \{0\}$  кольца  $R$  будем называть  $MI$ -аннулятором элемента  $m \in M$ .

Совокупность  $M^\wedge(I) = \{m \in (M \setminus MI) \cup \{0\} \mid MI(m) \cap B \neq \emptyset\}$  для любого правого идеала  $B$  такого, что  $B \not\subseteq I$ , будем называть достаточно  $I$ -сингулярным подмодулем модуля  $M$ .

**Следствие 1.**  $M^\wedge(I) = 0$  тогда и только тогда, когда для любого элемента  $0 \neq m \in M$  существует такой элемент  $x \in R \setminus I$ , что из  $mrx \in MI$  следует  $xr = 0$  при  $r \in R$ .

**Следствие 2.**  $R_I(I) = 0$  тогда и только тогда, когда для любого  $0 \neq y \in R$  существует  $x \in R \setminus I$  такой, что из  $uyx \in I$  следует  $xr = 0$  при  $r \in R$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Johnson R.E. The extended centralizer of a ring over a module // Proc. Amer. Math. Soc. 1951. V. 2. P. 891–895.
2. Johnson R.E. Structure theory of faithful rings II. Restricted rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1957. V. 84. '2. P. 523–544.

## Сервантные и слабосервантные подгруппы

Евдокименко В.Г.

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. Гриншпон С.Я.

Томский государственный университет

E-mail: [tupa\\_07@sibmail.com](mailto:tupa_07@sibmail.com)

Большую роль в теории абелевых групп играют сервантные подгруппы. Понятие сервантной подгруппы было введено Прюфером. Такие подгруппы являются промежуточными между просто подгруппами и прямыми слагаемыми; они отражают то, как подгруппа вложена в группу. Значение сервантных подгрупп заключается также в той методологической роли, которую они играют при доказательстве существования прямых слагаемых; именно, легко устанавливается существование сервантных подгрупп того или иного типа, и имеются различные критерии, при выполнении которых некоторые сервантные подгруппы выделяются прямыми слагаемыми.

В настоящей работе исследовались свойства сервантных, слабосервантных и изотипных подгрупп, с помощью которых удалось получить некоторые результаты о важных подгруппах абелевых групп.

**Теорема 1.** Пусть  $C$  – сервантная подгруппа группы  $G$ . Тогда для любого натурального числа  $n$  имеет место соотношение:

$$(G/C)[n] \cong G[n]/C[n].$$

**Теорема 2.** Пусть  $A$  и  $B$  подгруппы абелевой группы  $G$ , удовлетворяющие для любого натурального  $n$  следующим условиям:

(a)  $G = A + B$ ,

(b)  $C \cap nB \subset nC$ , где  $C = A \cap B$ .

Тогда для любого натурального  $n$  имеет место равенство:

$$G[n] = A[n] + B[n].$$

**Следствие 3.** Пусть  $A$  и  $B$  подгруппы абелевой группы  $G$ , удовлетворяющие для любого натурального  $n$  следующим условиям:

(a)  $G = A + B$ ,

$(b_1)$   $C$  – сервантная подгруппа группы  $B$ ,  
где  $C = A \cap B$ .

Тогда для любого натурального  $n$  имеет место равенство:  
 $G[n] = A[n] + B[n]$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс «Бесконечные абелевы группы» том 1 ;
2. Курош «Теория групп»;
3. Honda «Realism in the teory groups, I»;
4. Honda «Realism in the teory groups, II»;
5. Труды Московского Математического Общества «Обобщенные примарные группы, I» и «Обобщенные примарные группы, II».

## Алгоритм целочисленной факторизации на эллиптических кривых

**Кевролева К.В.**

**Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Росошек С.К.**

Томский государственный университет

E-mail: [kevroleva@mail2000.ru](mailto:kevroleva@mail2000.ru)

Эллиптическая кривая  $E(F_q)$  над конечным полем  $F_q$ ,  $q = q^n$ , представляет собой множество точек  $(x, y)$ , состоящее из решений уравнения  $y^2 = x^3 + ax + b$ ,  $a, b \in F_q$ , и бесконечно удаленной точки  $O$ . На этом множестве точек определена операция сложения, придающая эллиптической кривой структуру абелевой группы. Нулевым элементом является бесконечно удаленная точка.

В криптографии эллиптические кривые рассматриваются над двумя типами конечных полей: простыми полями нечетной характеристики ( $\square_p$ , где  $p > 3$  – простое число) и полями характеристики 2.

Порядок группы точек эллиптической кривой находится в интервале  $[p+1-2\sqrt{p}, p+1+2\sqrt{p}]$ . Если порядок группы выбран гладким относительно некоторой границы, то алгоритм целочис-

ленной факторизации на эллиптических кривых с высокой вероятностью находит нетривиальные множители числа  $n$ . В случае неудачи алгоритм повторяется для другой группы точек эллиптической кривой.

Алгоритм Ленстры [1](гл. 5, §4) используется для выявления простых делителей числа. Если полученное после работы алгоритма число все еще является составным, то остальные сомножители – большие числа. При увеличении количества кривых шансы найти простой сомножитель возрастают, но зависимость «количество цифр числа – количество эллиптических кривых» экспоненциальная.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Росошек С.К. Специальные главы математики (Математические основы криптографии). Часть 2: Учебное пособие. – Томск: Изд. Томский гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2005. – 190 с.;
2. Кнэпп. Э. Эллиптические кривые. Пер с англ. Ф.Ю. Попеленского. – М.: Изд-во «Факториал пресс», 2004. – 488 с.;
3. Коблиц Н. Курс теории чисел и криптографии. – М: Научное изд-во ТВП, 2001. – 254 с.;
4. Болотов А.А., Гашков С.Б., Фролов А.Б., Часовских А.А. Элементарное введение в эллиптическую криптографию: Алгебраические и алгоритмические основы. – М: КомКнига, 2006. – 328 с.;
5. Василенко О.Н. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. – М.: МЦНМО, 2003. – 328 с.

## **Квантовые компьютеры.**

**Горбунов Е.С., Ковалёва Т.Л.**

**Научный руководитель: Росошек С.К..**

Томский государственный университет

E-mail: [Ghostman@sibmail.com](mailto:Ghostman@sibmail.com)

Идея построения квантового компьютера принадлежит Р. Фейнману. Эти компьютеры радикально отличаются от классических: квантовый процессор может находиться одновременно во всех базисных состояниях. Основной частью квантового компьютера является квантовый регистр-совокупность некоторого числа кубитов.

Квантовый компьютер использует для вычисления не обычные (классические) алгоритмы.

Квантовое вычисление есть контролируемая классическим управляющим компьютером последовательность унитарных операций простого вида (над одним, двумя или тремя кубитами). В конце вычисления состояние квантового процессора измеряется, что и дает искомый результат вычисления.

Алгоритм Гровера — быстрый квантовый алгоритм решения задачи перебора. Его смысл состоит в «подскоке амплитуды» целевого состояния за счет убывания амплитуды всех других состояний. Алгоритм Гровера также может быть использован для нахождения медианы и среднего арифметического числового ряда. Кроме того, он может применяться для решения NP-полных задач путем исчерпывающего поиска среди множества возможных решений.

Алгоритм Шора — это квантовый алгоритм факторизации. Значимость алгоритма заключается в том, что при использовании квантового компьютера с несколькими сотнями логических кубитов, он сделает возможным взлом криптографических систем с открытым ключом.

Алгоритм Дойча — Джоза заключается в определении, является ли функция двоичной переменной  $f(n)$  (постоянной) или сбалансированной. Это один из первых примеров алгоритмов, предназначенных для выполнения на квантовых компьютерах.

Алгоритм телепортации реализует точный перенос состояния одного кубита (или системы) на другой.

Теоретически разработаны следующие модели квантового компьютера: импульсный ядерный магнитно-резонансный

(ЯМР) спектрометр высокого разрешения, использование ионных ловушек, квантовый компьютер на твердом теле.

Как бы ни развивалась технология квантовых вычислителей, они вряд ли целиком и полностью заменят классические компьютеры. В лучшем случае, как представляется автору, будут созданы квантовые сопроцессоры, ответственные за определенные типы вычислений.

## Логические исчисления

Милютченко С.В.

Научный руководитель: профессор, д.ф.м.н. Гриншпон С.Я.

Томский государственный университет

E-mail: [sergei\\_ne@sibmail.com](mailto:sergei_ne@sibmail.com)

Современная логика является историческим преемником традиционной логики и в некотором смысле её прямым продолжением. Но в отличие от традиционной, для современной логики характерно построение различного рода формализованных теорий логического рассуждения, т. е. логических исчислений. Логические исчисления позволяют сделать логические рассуждения предметом строгого анализа и тем самым полнее описать их свойства.

В данной работе рассматриваются следующие логические исчисления: исчисление высказываний и исчисление секвенций. Доказано следующее утверждение:

Если секвенция  $A \vdash B$  доказуема и не доказуемы секвенции  $A \dashv$  и  $\dashv B$ , то существует формула  $C$ , переменные которой входят как в  $A$ , так и в  $B$ , такая, что доказуемы следующие секвенции:  $A \vdash C$  и  $C \dashv B$

## Прямые суммы циклических абелевых групп с чистыми кольцами эндоморфизмов

Сорокин К.С.

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. Крылов П.А.

Томский государственный университет

E-mail: [Sorokin\\_k@list.ru](mailto:Sorokin_k@list.ru)

Пусть  $R$ – кольцо с единицей, элемент  $a$  кольца  $R$  называется чистым, если  $a=e+u$ , где  $e$ – идемпотент, а  $u$ – обратимый элемент кольца  $R$ . Кольцо  $R$  называется чистым, если всякий его элемент чистый. Понятие чистого кольца было предложено Николсоном в 1977 году [3] как пример кольца, в котором идемпотенты поднимаются по модулю любого левого (правого) идеала.

В случае, когда  $R$  является кольцом эндоморфизмов некоторого модуля, появляются новые описания свойства чистоты элементов кольца  $R$ , которые могут оказаться полезными при изучении условий чистоты кольца  $R$ . Поскольку абелевы группы являются  $Z$ -модулями, возникает естественная задача о нахождении необходимых и достаточных условий чистоты колец эндоморфизмов абелевых групп.

В результате проведённых исследований, были получены следующие результаты.

**Теорема 1.** Кольцо эндоморфизмов ограниченной группы чистое.

**Теорема 2.** Пусть  $A$  – прямая сумма циклических групп и  $f$  – её эндоморфизм. Если  $L$  – прямое слагаемое группы  $A$ , содержащее образ  $f(A)$ , причём  $f|_L$  – чистый эндоморфизм группы  $L$ , то  $f$  – чистый эндоморфизм группы  $A$ .

**Следствие 1.** Пусть  $A$  – прямая сумма циклических групп и  $f$  – её эндоморфизм. Если высоты ненулевых элементов образа  $f(A)$  ограничены в совокупности, то  $f$  – чистый эндоморфизм группы  $A$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. – М: Факториал Пресс, 2006.
2. Туганбаев А.А. Теория колец. – М.: МЦНМО, 2009.
3. Nicholson W.K. Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1977, № 229, p. 269–278.
4. Han J., Nicholson W.K. Extension of clean rings // Commun. Algebra. 2001, V.29, №6. p. 2589–2595.
5. Nicholson W. K., Varadarajan K., Zhou Y. Clean endomorphism rings // Arch. Math. 2004, №83. p. 340–343.
6. Camillo V.P., Khurana D., Lam T.Y., Nicholson W.K., Zhou Y. Continuous modules are clean // J. Algebra. 2006, №304. p. 94–111.

## СЕКЦИЯ «ГЕОМЕТРИЯ»

### Математическая модель процесса сближения двух поверхностей в пространстве

Камчатный С.А.

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Щербаков Н.Р.

Томский государственный университет

E-mail: [kam-serega2030@sibmail.com](mailto:kam-serega2030@sibmail.com)

Современные многокоординатные станки с ЧПУ, способны обрабатывать поверхности весьма сложной конфигурации, но точность этой обработки, заложенная в компьютерной программе станка, не всегда удовлетворяет заказчика. Поэтому возникает необходимость создания специальной компьютерной программы управления движением фрезы, обрабатывающей деталь.

Выходная деталь образована плоскопараллельным движением циклоидальной кривой (эквидистанты эпитрохоиды). Поверхность фрезы – сфера. Необходимо найти координаты точек касания фрезы с выходной деталью при условии, что координаты центра сферы лежат в фиксированной плоскости. Это условие приводит к системе трех уравнений на 4 неизвестных, которая позволяет находить координаты центра сферы для каждой выделенной координатной линии на поверхности выходной детали. На рис. 1 показано множество всех точек касания фрезы с деталью.



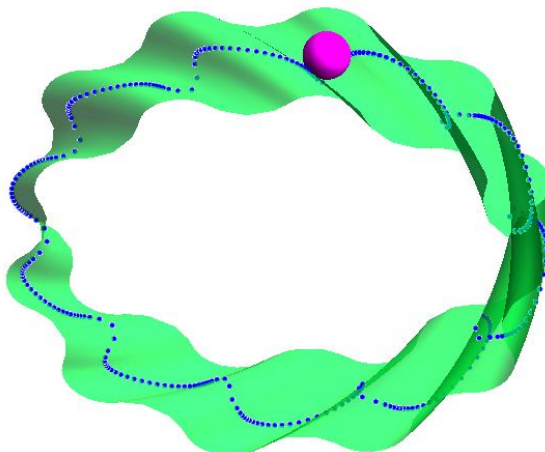


Рис. 1

## Хроматическое число. Трёхмерный случай

Тарновская Е. П.

Научный руководитель: к.ф.м.н. Корякина Е. Е.

Томский государственный университет

E-mail: [elenatarnovskaya@sibmail.com](mailto:elenatarnovskaya@sibmail.com)

**Определение 1.** Хроматическим числом евклидова пространства называется величина  $\chi = \chi(\square^3)$ , равная минимальному количеству цветов, в которые можно так раскрасить все точки  $\square^3$ , чтобы расстояние между точками одного цвета не могло оказаться равным единице.

**Определение 2.** Множество точек  $A$  на плоскости называется  $(M, D)$ -критической конфигурацией, если мощность множества  $A$  (т. е. число элементов в  $A$ ) равна  $M$  и в то же время в любом подмножестве  $F$  множества  $A$ , таком, что  $\#F = D + 1$ , найдётся пара точек  $F_1, F_2$  на расстоянии 1.

**Определение 3.** Решёткой  $\Lambda$  в пространстве называется множество всех точек вида

$$\vec{ax} + \vec{by} + \vec{cz} = (ax_1 + by_1 + cz_1, ax_2 + by_2 + cz_2, ax_3 + by_3 + cz_3),$$

где векторы  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$  и  $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ , а величины  $a$ ,  $b$  и  $c$  принимают любые целочисленные значения. Векторы  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  и  $\vec{z}$  образуют базис решётки  $\Lambda$ .

**Определение 4.** Разбиением пространства на многогранники называется бесконечное множество  $T$ , состоящее из таких (многогранных) тел  $T_1, T_2, \dots$ , что их объединение  $T_1 \cup T_2 \cup \dots$  совпадает со всем  $\square^3$  и что любые две из них пересекаются, как максимум, по элементам границы (граням, ребрам, вершинам).

Для  $\chi(\square^3)$  можно получить соответствующие оценки и зазор между ними, по сравнению с оценками  $\chi(\square^2)$  плоскости, возрастет. Рассмотрим следующие теоремы.

**Теорема 1** (Д. Е. Райский, 1970). Имеет место неравенство  $\chi(\square^3) \geq 5$ .

**Теорема 2** (Д. Кулсон, 2000). Имеет место неравенство  $\chi(\square^3) \leq 15$ .

Проблема раскраски пространства с помощью многогранников заключается в том, что сами многогранники должны иметь диаметр, меньший единицы и расстояние между многогранниками одного цвета должно быть больше единицы. Оценка  $\chi(\square^3) \leq 27$  получена с помощью общего метода, т. к. кубы суть многогранники Вороного для решётки  $\square^3$ . Оценка  $\chi(\square^3) \leq 21$  доказывается за счёт рассмотрения решётки, порождённой базисом из векторов  $(1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$ ; оценка  $\chi(\square^3) \leq 18$  следует из свойств разбиения Вороного

для решётки с базисом  $(1, 0, 0)$ ,  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ,  $(0, 0, 1)$ , а результат

теоремы 2 обусловлен структурой решётки, построенной на векторах  $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, 0\right)$ ,  $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}, 0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$ ,  $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, 0\right)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Райгородский А. М. Хроматическое число плоскости. //Математическое просвещение. - вып. - 28 - 2003. - с. 13 - 19.

## СЕКЦИЯ «ГИДРОМЕХАНИКА»

### Сравнительный анализ различных подходов к решению плоской задачи теплопроводности

Гусев С.И.

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Шеремет М.А.

Томский государственный университет

E-mail: [gusev@mexmat.org](mailto:gusev@mexmat.org)

Исследование численных методик решения прикладных задач математической физики позволяет определить наиболее оптимальные и эффективные подходы к моделированию процессов тепло-массопереноса в различных технологических системах [1]. Знание основных положений каждого из возможных вариантов численной реализации краевых задач помогает выбрать наиболее удачный подход к решению конкретной задачи.

В настоящей работе проведен сравнительный анализ методов конечных разностей и контрольного объема применительно к решению двумерной нестационарной задачи теплопроводности. Установлены масштабы влияния сеточных параметров на время численной реализации задачи, а также на погрешность вычислений. Показаны некоторые преимущества метода контрольного объема, обусловленные консервативностью получаемых разностных схем, а также несущественным влиянием вида разностной сетки на алгоритм построения сеточных уравнений. Необходимо отметить, что на основе метода контрольного объема можно проводить анализ гидродинамики и теплопереноса в естественных переменных «скорость – давление» [1], не прибегая при этом либо к введению дополнительных слагаемых в уравнение неразрывности (метод искусственной сжимаемости [2]), либо к преобразованию переменных (переход к переменным «функция тока – завихренность» [2, 3]).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.

2. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
3. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.

## **Математическое моделирование упругого контактирования двух гуконских тел сложной формы**

**Диль Д.О.**

**Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. Бубенчиков А.М.**

Томский государственный университет

[gradpower@list.ru](mailto:gradpower@list.ru)

В настоящее время при прочностном расчёте различных механизмов часто используется аналитическое решение задачи Герца. Но поскольку оно осуществлено только для простых видов контактирующих поверхностей, возникает необходимость численного расчёта контакта деталей со сложными поверхностями. В данной работе проведены расчёты в двумерной постановке, с целью дальнейшего их обобщения на трёхмерный случай.

Рассматривая стационарную задачу контактирования без учёта массовых сил и принимая во внимание несжимаемость детали, получаем уравнения Ламе в форме уравнений Лапласа, записанных в полярной системе координат. Для вала, профилем которого в сечении, перпендикулярном оси вращения, является эквидистанта эпициклоиды, будем использовать равномерную сетку, заданную таким образом, чтобы обязательно покрыть линию контакта. Осуществим доворот эксцентрика, считая большой вал недеформируемым. Для эксцентрика в качестве граничных точек сетки на линии контакта возьмём граничные точки сетки большого вала. Благодаря этому существенно упрощается определение координат точек границы, а также граничных условий для компонент вектора перемещений. На остальной части эксцентрика сетку зададим равномерно, взяв её более разреженной для экономии времени расчётов.

Заменяя частные производные разностными, получим следующий вид рассматриваемых уравнений для компонент вектора перемещений:

$$\frac{\bar{W}_{i+1,j} - 2\bar{W}_{i,j} + \bar{W}_{i-1,j}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r_{i,j}} \frac{\bar{W}_{i+1,j} - \bar{W}_{i-1,j}}{2\Delta r} + \frac{1}{r_{i,j}^2} \left( \frac{\bar{W}_{i,j+1} - \bar{W}_{i,j}}{(\varphi_{j+1} - \varphi_j)(\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1})} - \frac{\bar{W}_{i,j} - \bar{W}_{i,j-1}}{(\varphi_j - \varphi_{j-1})(\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1})} \right) = 0,$$

имеющих второй порядок точности относительно шага сетки и учитывающих неравномерность шага по угловой координате.

Граница рассматриваемой области состоит из двух частей: линии контакта и свободной границы. Граничные условия на линии контакта легко определяются с использованием известных координат точек границы и условия несжимаемости. На свободной границе

условие  $\frac{\partial U}{\partial r} = 0$  аппроксимируем по формуле:

$$U_{n,j} = \frac{4U_{n-1,j} - U_{n-2,j}}{3},$$

имеющей также второй порядок точности.

Используя следующее выражение для нормальной компоненты тензора напряжений  $\sigma_{rr} = \lambda \left( \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{U}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial U}{\partial r}$  и считая её на границе равной нулю, получим следующее граничное условие для углового перемещения:  $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -U$ . Его разностная аппроксимация имеет следующий вид:

$$V_{n,j+1} = V_{n,j-1} - (\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}) \cdot U_{n,j}.$$

Применяя метод простой итерации, получим компоненты вектора перемещений во всей рассматриваемой области. Для реализации этих расчётов была написана программа на языке C++. Она была составлена таким образом, чтобы в дальнейшем можно было легко обобщить полученные результаты на случай плоской задачи с заранее неизвестной границей контактирования, а также на пространственный случай.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шанников В.М. Планетарные редукторы с внецентроидным зацеплением. – М. : ГНТИМЛ, 1948.
2. Математическое моделирование работы зубчатой реечной передачи с эксцентриково-циклоидальным зацеплением / Бубенчиков А.М. [и др.] // Вычислительные технологии. 2010. – Т. 15, № 1. – С. 53-59.

3. Математическое моделирование работы редуктора с эксцентриково-циклоидальным зацеплением / Диль Д.О. // Научная студенческая конференция механико-математического факультета: Сборник трудов конференции (Томск, 19 - 23 апреля 2010 г.) - Томск: Томский государственный университет, 2010 г. - С. 32-34.

## СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

### Теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши

Анциферова Е.В.

Научный руководитель: к. ф. - м. н. Малютина А.Н.

Томский Государственный Университет

E-mail: [Zhenya4549@mail.ru](mailto:Zhenya4549@mail.ru)

В работе рассматриваются теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Теоремы существования дают возможность находить решение задачи Коши приближенно, если оно не принадлежит ни одному из типов уравнений, интегралы которых находятся элементарными приемами.

**Постановка задачи Коши:** Требуется найти решения уравнения

$$y'_x = f(x, y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

удовлетворяющее *начальному условию*

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0. \quad (2)$$

**Теорема о существовании решения (теорема Пеано):** Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна в открытой области  $D$  плоскости  $xy$ . Тогда через каждую точку  $(x_0, y_0)$  области  $D$  проходит, по крайней мере, одна интегральная кривая уравнения  $y'_x = f(x, y)$ , и каждая из этих кривых может быть продолжена в обе стороны вплоть до границы любой замкнутой области, целиком содержащейся в  $D$  и содержащей точку  $(x_0, y_0)$  внутри себя.

**Теорема о единственности решения (теорема Осгуда):** Если функция  $f(x, y)$  для любой пары точек  $(x, y_1)$  и  $(x, y_2)$  области  $D$  удовлетворяет условию

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \varphi(|y_1 - y_2|), \quad (3)$$

где  $\varphi(u) > 0$  при  $0 < u \leq a$  непрерывна и такова, что  $\int_{\varepsilon}^a \frac{du}{\varphi(u)} \rightarrow \infty$ , когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то через каждую точку  $(x_0, y_0)$  области  $D$  проходит не больше одной интегральной кривой уравнения (1).

**Теорема о существовании и единственности решения (теорема Пикара):** Пусть в замкнутой области  $D$  на плоскости

$(x,y)$  функция  $f(x,y)$  ограничена, непрерывна по  $x$  и удовлетворяет условию Липшица по  $y$ :

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L|y_2 - y_1|.$$

Тогда для любой внутренней точки  $(x_0, y_0)$  из  $D$  можно указать такой заключающий внутри себя точку  $x_0$  замкнутый интервал  $[a, b]$  на оси  $O_x$ , на котором существует единственное решение дифференциального уравнения (1) при условии (2).

В курсовой работе приведены примеры функций ( $\varphi(u) = Mu$ ;  $\varphi(u) = Mu \ln|u|$ ), для которых выполнены условия теоремы Пеано и Осгуда, но выполнены или не выполнены условия теоремы Пикара. При выполнении теоремы Пикара выполнены условия теорем Пеано и Осгуда.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений/И.Г. Петровский - Москва Физматлит, 2009, 207с.

## Статистический анализ временных рядов

**Васильева О.В.**

**Научный руководитель: Емельянова Т.В.**

Томский государственный университет

В данной работе исследуются данные, предоставленные брокерской компанией «АЛОР», по купле-продаже ценных бумаг Сбербанка России. По этим данным методом наименьших квадратов был проведен анализ зависимости цены акции от времени в период экономического кризиса и в период относительной стабильности экономики. С помощью критерия Дарбина-Уотсона была определена автокорреляция в остатках, и, применив обобщенный МНК, оценены параметры уравнений регрессии, содержащих автокорреляцию в остатках.

Но главная задача заключалась в решении следующей экстремальной задачи:

Можно представить себе модель, в которой колебания цен на акции в течение единичного периода времени (например, день) опи-



сываются броуновским движением (разумеется, это интерпретация, так как цены не бывают отрицательными) и требуется выбрать момент  $\tau_*$  для самой выгодной в среднем квадратическом смысле продажи акций. Решение этой задачи дает следующая теорема:

*Теорема (Граверсен, Пешкир, Ширяев).*

$$\tau_* = \inf\{t \in [0; 1] : S_t - W_t = z_* \sqrt{1-t}\}, \text{ где } S_t = \max_{0 \leq s \leq t} W_s, t \in [0; 1],$$

а константа  $z_*$  находится из уравнения  $4\Phi(z_*) - 2\varphi(z_*) - 3 = 0$ , здесь  $\Phi$  и  $\varphi$  - соответственно функция распределения и плотность стандартной нормальной величины.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Булинский А.В. Теория случайных процессов/А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. – М.: Физматлит, 2005.-408 с.
2. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики/А.Н. Ширяев. – М.: Фазис, 1998. – 512 с.

## Вклад Леонардо Эйлера в математический анализ

**Дериглазова И.А.**

**Научный руководитель: доцент, к. ф. – м. н. Александров И.А.**

Томский государственный университет

E-mail: [innusik\\_kz\\_91@mail.ru](mailto:innusik_kz_91@mail.ru)

Л.Эйлер – самый продуктивный математик в истории, автор более чем 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближённым вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др. Он внёс очень большой вклад в развитие математического анализа. Цель моей работы – изучить историю развития математического анализа в восемнадцатом веке и как Л.Эйлер повлиял на этот процесс.

В восемнадцатом веке происходил значительный прогресс анализа бесконечно малых. Благодаря влиянию Бернулли (друзей семьи Эйлера), исследования в этом направлении стали основными в работах Эйлера. Эйлер хорошо известен в анализе с частого использова-

ния и развития степенных рядов, выражающих функцию в виде суммы бесконечного множества степенных функций.

Геометрический смысл формулы Эйлера Эйлер начал использовать в аналитических доказательствах экспоненты и логарифмов. Ему удалось разложить в степенной ряд логарифмическую функцию и, посредством этого расписания, определить логарифмы для отрицательных и комплексных чисел. Он также расширил множество определения экспоненциальной функции на комплексные числа, и обнаружил связь экспоненты с тригонометрическими функциями, с помощью чего Эйлер вывел свою знаменитую формулу:

$$e^{\sqrt{-1}x} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x$$

В дальнейшем будут рассмотрены частные случаи формулы Эйлера, а также другие факты из жизни Эйлера, его достижения в математическом анализе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Артемьева Т.В. Леонард Эйлер как философ//Философия в Петербургской Академии наук XVIII века.-СПб.:1999.-182с.
2. Делоне Б.Н. Леонард Эйлер//Квант.-1974.-№5.
3. К 250-летию со дня рождения Л.Эйлера:Сборник.-Изд-во АН СССР,1958.
4. Математика XVIII столетия/Под редакцией А.П.Юшкевича.-М.:Наука, 1972.-Т.3. – (История математики в 3-х томах).
5. Полякова Т.С. Леонард Эйлер и математическое образование в России. – КомКнига, 2007. – 184с.
6. Юшкевич А.П. История математики в России. –М.: Наука,1968.

## Исследование отображения на круговой счетно- угольник с симметрией переноса

**Колесников И. А.**

**Научный руководитель: доцент, к.ф.м.н. Копанева Л.С.**

Томский государственный университет

E-mail: [Ivan-delfin@list.ru](mailto:Ivan-delfin@list.ru)

Область  $\Delta$  будем называть круговым односвязным счетноугольником, если она является областью типа полуплоскости, односвязна и ее граница состоит из счетного числа дуг окружностей. Область  $\Delta$  считаем областью с симметрией переноса вдоль вещественной оси, если  $\Delta=L(\Delta)$ , где  $L(w)=w+T$ . Если при преобразованиях  $L(w)=w+T$

среди всех простых концов границы области  $\Delta$  в точке  $w=\infty$  неподвижным остается только один простой конец, то такую область  $\Delta$  будем называть областью типа полуплоскости.

Для функции  $f(z)$ , однолистно и конформно отображающей верхнюю полуплоскость  $\Pi^+ = \{z: \text{Im}z > 0\}$  на круговой односвязный счетноугольник  $\Delta$  с симметрией переноса вдоль вещественной оси на  $2\pi$ , получено дифференциальное уравнение

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 = \frac{1}{8} \sum_{s=1}^n \frac{1 - (\alpha_s^0)^2 - 2M_s \sin(\alpha_s^0 - z)}{\sin^2 \frac{\alpha_s^0 - z}{2}} + g(z)$$

Здесь  $\alpha_s^0$ ,  $s=1, \dots, n$  - прообразы вершин  $A_s^0$  счетноугольника, принадлежащие промежутку  $[0, 2\pi)$ , углы при этих вершинах - соответственно  $\alpha_s \pi$ ,  $s=1, \dots, n$ . Целая функция  $g(z)$  подлежит определению из условий конкретной задачи. Константы  $M_s$ ,  $s=1, \dots, n$  - вычеты производной Шварца функции  $f(z)$  в точках  $\alpha_s^0$ .

Для одного из частных случаев уравнение для отображающей функции сведено к уравнению Римана, функция записана с помощью гипергеометрических интегралов. Уравнение соответствующее другому частному случаю исследовано методом Хилла.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И.А. Теория функций комплексного переменного. Томский государственный университет, Томск, 2002.
2. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. ч1, II. Москва 1963г.
3. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Москва 1950г.

## Приемы разложения в ряд Тейлора и исследование этих разложений

**Молчанова Н. В.**

**Научный руководитель: ст. преподаватель Емельянова Т. В.**  
Томский государственный университет  
E-mail: [niaren@mail.ru](mailto:niaren@mail.ru)

Ряд Тейлора — разложение функции в бесконечную сумму степенных функций. Ряд назван в честь английского математика Тейлора, хотя ряд Тейлора был известен задолго до публикаций Тейлора его использовали ещё в XVII веке Грегори, а также Ньютон.

Основными приемами разложения дифференцируемых функций в ряд Тейлора являются:

Непосредственное разложение функции в ряд Тейлора;

Использование основных табличных разложений;

Использование операций над рядами;

Почленное интегрирование ряда.

В работе рассматривается вычисление интеграла  $\int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ ,

лежащего в основе нормального распределения и широко используемого в теории вероятностей и математической статистике.

## Об области значений функционала в задаче о неналегающих областях

**Пчелинцев В.А.**

**Научный руководитель: профессор, д.ф.м.н. Александров И.А.**  
Томский государственный университет  
E-mail: [VPchelintsev@vtomske.ru](mailto:VPchelintsev@vtomske.ru)

Задачи о неналегающих областях имеют богатую историю и непосредственно связаны с различными экстремальными вопросами геометрической теории функций комплексного переменного. Один из первых результатов принадлежит М.А. Лаврентьеву. В

дальнейшем такого типа задачи были рассмотрены в работах П.П. Куфарева, Г.М. Голузина, Н.А. Лебедева и других математиков. В данной работе исследуется область значений  $E$  функционала

$$\xi = \ln f(z_0) - \ln F(\zeta_0) \quad (1)$$

при фиксированных  $z_0$  и  $\zeta_0$  соответственно из  $0 < |z_0| < 1$  и  $1 < |\zeta_0| < \infty$

в классе  $M$ . Для исследования этой задачи используется метод внутренних вариаций. Приводятся наиболее яркие результаты, в частности, выводы вариационных формул в классе  $M$ . Установлено необходимое условие для экстремальных функций  $f(z)$ ,  $F(\zeta)$  этого функционала. Доказана следующая лемма:

**Лемма.** Пусть  $f(z)$ ,  $F(\zeta)$  – экстремальные функции функционала (1). Тогда множества  $f(U)$  и  $F(U^*)$ , где  $U$  – единичный круг и  $U^*$  – его внешность, одновременно не имеют внешних точек.

Получены дифференциальные уравнения для экстремальных функций.

**Теорема.** Каждая экстремальная пара функций  $(f(z), F(\zeta)) \in M$  функционала (1) удовлетворяет функционально-дифференциальным уравнениям

$$e^{-i\alpha} \frac{zf'(z)}{f(z)} \left( \frac{1}{f(z) - F(\rho)} - \frac{1}{f(z) - f(r)} \right) = \frac{C}{(r-z)(1-rz)},$$

$$e^{-i\alpha} \frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)} \left( \frac{1}{F(\zeta) - F(\rho)} - \frac{1}{F(\zeta) - f(r)} \right) = \frac{D}{(\rho - \zeta)(1 - \rho\zeta)},$$

где

$$C = e^{-i\alpha} \frac{rf'(r)}{f(r)} (1 - r^2) > 0; \quad D = e^{-i\alpha} \frac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)} (\rho^2 - 1) > 0.$$

Проведен анализ полученных уравнений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И.А. Методы геометрической теории аналитических функций/ И.А. Александров. - Томск: Том. гос. ун-т, 2001, 220с.
2. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного/ Г.М.Голузин. – М.: Наука, 1966, 628с.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 3 ч.2/ В.И. Смирнов. – СПб: БХВ – Петербург, 2010, 816с.

## **Числа Фибоначчи и другие рекуррентные последовательности**

**Чернодубова К.С.**

**Научный руководитель: профессор, Александров И. А.**

Томский государственный университет

E-mail: [ksy-103@mail.ru](mailto:ksy-103@mail.ru)

В элементарной математике существует много задач, часто трудных и интересных, которые не связаны с чьим-либо именем, а скорее носят характер своего рода «математического фольклора». Эти задачи нередко имеют хождение в нескольких вариантах; иногда несколько таких задач объединяют в одну, более сложную; иногда, наоборот, одна задача распадается на несколько более простых; словом, часто, оказывается, трудно различить, где кончается одна задача и начинается другая. Правильнее всего было бы считать, что в каждой из таких задач мы имеем дело с маленькими математическими теориями, имеющими свою историю, свою проблематику и свои методы – все это, разумеется, тесно связано с историей, проблематикой и методами «большой математики».

Такой теорией являются и теория чисел Фибоначчи. Выросшие из знаменитой «задачи о кроликах», имеющей более семисот пятидесятилетнюю давность, числа Фибоначчи до сих пор остаются одной из самых увлекательных глав элементарной математики.

Кроме того, и это являются фундаментальным фактом истории математики нашего времени, существенно сместился центр математических исследований в целом. В частности, утратила свои доминирующие позиции теория чисел и резко повысился удельный вес экстремальных задач. В самостоятельную отрасль математики сложилась теория игр. По существу возникла вычислительная математика.

Наконец было установлено довольно большое количества ранее неизвестных свойств чисел Фибоначчи, а к самим числам существенно возрос интерес. Значительное число связанных с математикой людей в различных странах приобщились к благородному хобби «фибоначчизма».

## Отображение с симметрией переноса

Шелковникова М.Г.

Научный руководитель: доцент, к. ф. - м. н. Копанева Л. С.

Томский государственный университет

E-mail: [shelkovnikova-m@mail.ru](mailto:shelkovnikova-m@mail.ru)

Пусть область  $D$  есть односвязная область с симметрией переноса вдоль вещественной оси типа полуплоскости, граница которой состоит из отрезков прямых и лучей, причем при движении по границе от точки  $w_0$  до  $w_0 + 2\pi$  их должно быть конечное число. Будем такую область называть счетноугольником.

**Теорема.** Для отображения  $f$  из класса  $X_{2\pi}$ , переводящего верхнюю полуплоскость в счетноугольник, имеет место формула Шварца-Кристоффеля

$$f(z) = c_1 \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^n \left( \sin \frac{a_k^{(0)} - z}{2} \right) dz + c_2$$

где  $c_1, c_2$  - комплексные постоянные,  $a_k^{(0)} \in (0, 2\pi)$  прообразы вершин счетноугольника с углами  $\alpha_k \pi$ .

Изучаются частные случаи отображений, область которых представляет собой исключенные 3-х и 4-х угольники. В случае если 4-х угольник является прямоугольником, формула Кристоффеля-Шварца для полуплоскости с исключенным прямоугольником примет вид:

$$f(z) = c_1 \int_{z_0}^z \sqrt{\frac{\cos z}{\cos z - \frac{\sqrt{2}}{2}}} dz + c_2$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И.А. Теория функций комплексного переменного / И.А. Александров. - Томск: Том. гос. ун-т, 2002, 510с.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б. В. Методы теории функции комплексного переменного/М.А. Лаврентьев.- М.: Наука 1987, 688с.

## Об одном совершенном семействе множеств

Шишкова А.А.

Научный руководитель: д.ф.м.н. Касаткина Т.В.

Томский государственный университет

E-mail: [Shishkova@sibmail.com](mailto:Shishkova@sibmail.com)

Как известно, если числовое множество является замкнутым, без изолированных точек (т.е. любая точка этого множества является предельной), то его принято называть совершенным. Фундаментальным результатом, относящимся к совершенным множествам, является то, что всякое непустое совершенное множество из  $\mathbb{R}$  несчетно, более того его мощность равна мощности множества  $\mathbb{R}$ . Самым знаменитым примером совершенного нигде ни плотного множества нулевой меры является канторово множество  $C$ . Этот пример был построен немецким математиком Гергом Кантором, поэтому множество названо в его честь.

Метод построения канторова множества в несколько измененном виде можно применить для построения целого семейства линейных дисконтинуумов положительной меры.

Пусть  $0 < \alpha < 1$ . Из отрезка  $[0; 1]$  на первом шаге выбросим интервал с центром в точке  $\frac{1}{2}$  длины  $\frac{1}{2}\alpha$ . Из двух оставшихся отрезков удалим средние открытые интервалы, длина каждого из которых равна  $\frac{1}{4}\alpha$ . На  $n$  шаге мера удаленных открытых интервалов будет равна  $\alpha(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + 2^{-n})$ . После бесконечного числа удалений открытых интервалов меры  $\alpha$ , оставшееся множество  $A_\alpha$  меры  $(1-\alpha)$  назовем канторовым множеством положительной меры. Построенное таким образом семейство множеств  $\{A_\alpha \mid 0 < \alpha < 1\}$  является нигде неплотным совершенным множеством и имеет мощность равную мощности множества  $\mathbb{R}$ .

Легко показать, что все канторовы множества положительной или нулевой меры гомеоморфны. Более того, существует гомеоморфизм  $f$  отрезка  $[0; 1]$  на отрезок  $[0; 1]$ , такой, что  $f(C) = A_\alpha$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Б.Гельбаум, Дж. Олмстед Контрпримеры в анализе – Москва, 2007г..
2. Математическая энциклопедия.



## Экспоненты дробного анализа целочисленного порядка 3

**Чуриков В.А.**

Томский политехнический университет,  
E-mail: vachurikov@list.ru

В случае дробном анализе целочисленных порядков [1] имеет место экспоненциальное вырождение, в соответствии с которым ветвь дробного анализа целочисленного порядка  $n$  имеет  $n^2$  экспонент.

В работе [2], были рассмотрены три экспоненты из девяти в целочисленном дробном анализе порядка 3. Все девять экспонент удобно представить в виде матрицы экспонент порядка 3

$$\exp_3^{(p|\lambda)}(x) = \begin{pmatrix} \exp_3^{(1|1)}(\alpha_1 x) & \exp_3^{(1|2)}(\alpha_2 x) & \exp_3^{(1|3)}(\alpha_3 x) \\ \exp_3^{(2|1)}(\alpha_1 x) & \exp_3^{(2|2)}(\alpha_2 x) & \exp_3^{(2|3)}(\alpha_3 x) \\ \exp_3^{(3|1)}(\alpha_1 x) & \exp_3^{(3|2)}(\alpha_2 x) & \exp_3^{(3|3)}(\alpha_3 x) \end{pmatrix}; p, \lambda = 1, 2, 3.$$

Здесь элементами матрицы являются экспоненты разных номеров  $p$  и с разными константами  $\alpha_\lambda$ , которые удовлетворяют уравнению инвариантности  $\alpha_\lambda^3 = 1$ . Всего будет 3 решения этого уравнения, которые названы корнями инвариантности и легко находятся по формуле Муавра,

$$\alpha_1 = 1; \alpha_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \alpha_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда ряды для всех девяти экспонент порядка 3 легко выразить. В случае первого корня инвариантности  $\alpha_1 = 1$ , получим три основных экспоненты, одну главную и две дополнительные, соответственно первого, второго и третьего номера

$$\exp_3^{(1|1)}(x) \equiv \exp_3^{(1)}(\alpha_1 x) \equiv \exp_3^{(1)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!} = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \dots;$$

$$\exp_3^{(2|1)}(x) \equiv \exp_3^{(1)}(\alpha_1 x) \equiv \exp_3^{(2)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!} = \frac{x^1}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \dots;$$

$$\exp_3^{(3|1)}(x) \equiv \exp_3^{(1)}(\alpha_1 x) \equiv \exp_3^{(3)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

Все основные экспоненты являются вещественными функциями.

Со вторым корнем инвариантности связаны три однокоренные экспоненты, которые будут комплексными функциями

$$\exp_3^{(1|2)}(x) \equiv \exp_3^{(1)}(\alpha_2 x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_2 x)^{3n+2}}{(3n+2)!} = \frac{(\alpha_2 x)^2}{2!} + \frac{(\alpha_2 x)^5}{5!} + \frac{(\alpha_2 x)^8}{8!} + \dots;$$

$$\exp_3^{(2|2)}(x) \equiv \exp_3^{(2)}(\alpha_2 x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_2 x)^{3n+1}}{(3n+1)!} = \frac{(\alpha_2 x)^1}{1!} + \frac{(\alpha_2 x)^4}{4!} + \frac{(\alpha_2 x)^7}{7!} + \dots;$$

$$\exp_3^{(3|2)}(x) \equiv \exp_3^{(3)}(\alpha_2 x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_2 x)^{3n}}{(3n)!} = 1 + \frac{(\alpha_2 x)^3}{3!} + \frac{(\alpha_2 x)^6}{6!} + \frac{(\alpha_2 x)^9}{9!} + \dots$$

С третьим корнем инвариантности связаны ещё три комплексные экспоненты

$$\exp_3^{(1|3)}(x) \equiv \exp_3^{(1)}(\alpha_3 x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_3 x)^{3n+2}}{(3n+2)!} = \frac{(\alpha_3 x)^2}{2!} + \frac{(\alpha_3 x)^5}{5!} + \frac{(\alpha_3 x)^8}{8!} + \dots;$$

$$\exp_3^{(2|3)}(x) \equiv \exp_3^{(2)}(\alpha_3 x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_3 x)^{3n+1}}{(3n+1)!} = \frac{(\alpha_3 x)^1}{1!} + \frac{(\alpha_3 x)^4}{4!} + \frac{(\alpha_3 x)^7}{7!} + \dots;$$

$$\exp_3^{(3|3)}(x) \equiv \exp_3^{(3)}(\alpha_3 x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_3 x)^{3n}}{(3n)!} = 1 + \frac{(\alpha_3 x)^3}{3!} + \frac{(\alpha_3 x)^6}{6!} + \frac{(\alpha_3 x)^9}{9!} + \dots$$

Все девять экспонент инвариантны относительно операции дробного дифференцирования дробного интегрирования третьего порядка  $d$ -оператором, только интегрирование инвариантно с точностью до сложения с полиномом интегрирования третьего порядка  $C_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ;  $a_0, a_1, a_2 = \text{const}$

$$d^{-3} x : \exp_3^{(p|\lambda)}(x) = \exp_3^{(p|\lambda)}(x); d^3 x : \exp_3^{(p|\lambda)}(x) = \exp_3^{(p|\lambda)}(x) + C_3(x).$$

## Литература

1. Чуриков В.А. Экспоненциальное вырождение в дробном анализе целочисленных порядков // Материалы международного Российско-Болгарского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», г. Нальчик, а. Хабез, 25 - 30 июня, 2010 г. – С. 251-254. Из 275 с.
2. Чуриков В.А. Некоторые элементарные функции анализа порядка 3 // Сборник материалов Четвертой Всероссийской молодежной научно-инновационной школы «Математика и математическое моделирование», г. Саров, СарФТИ НИЯУ МИФИ, 19 – 22 апреля 2010, г. Саров: Альфа, 2010 – С. 27–30. Всего 270 с.

## Гиперболические функции дробного анализа целочисленного порядка 3

Чуриков В.А.

Томский политехнический университет,  
E-mail: vachurikov@list.ru

Гиперболические функции в целочисленном порядке 3 выражаются через экспоненты целочисленного порядка 3 по формуле [1]

$$\operatorname{sh}_3^{(p;\mu;q|\alpha)}(x) = \frac{1}{2}(\exp_3^{(p;\mu)}(x) - \exp_3^{(q|\nu)}(-x));$$

$$\operatorname{ch}_3^{(p;\mu;q|\nu)}(x) = \frac{1}{2}(\exp_3^{(p;\mu)}(x) + \exp_3^{(q|\nu)}(-x)); p, q, \mu, \nu = 1, 2, 3.$$

Всего можно скомбинировать  $81=9 \times 9$  гиперболических синусов и 81 гиперболических косинусов порядка 3.

В зависимости от корней инвариантности  $\alpha_1 = 1; \alpha_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \alpha_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ , можно выделить вещественные, вещественно-комплексные и комплексные гиперболические функции.

Вещественные функции являются линейными комбинациями вещественных экспонент. Всего будет по 9 *вещественных гиперболических синусов* и *вещественных гиперболических косинусов* порядка 3

$$\operatorname{sh}_3^{(p;q)}(x) \equiv \operatorname{sh}_3^{(p|1;q|1)}(x) = \frac{1}{2}(\exp_3^{(p|1)}(x) - \exp_3^{(q|1)}(-x));$$

$$\operatorname{ch}_3^{(p;q)}(x) \equiv \operatorname{ch}_3^{(p|1;q|1)}(x) = \frac{1}{2}(\exp_3^{(p|1)}(x) + \exp_3^{(q|1)}(-x)).$$

Эти функции легко представить в виде квадратных матриц  $3 \times 3$

$$\text{sh}_3^{(p|q)}(x) = \begin{pmatrix} \text{sh}_3^{(1|1)}(x) & \text{sh}_3^{(1|2)}(x) & \text{sh}_3^{(1|3)}(x) \\ \text{sh}_3^{(2|1)}(x) & \text{sh}_3^{(2|2)}(x) & \text{sh}_3^{(2|3)}(x) \\ \text{sh}_3^{(3|1)}(x) & \text{sh}_3^{(3|2)}(x) & \text{sh}_3^{(3|3)}(x) \end{pmatrix};$$

$$\text{ch}_3^{(p|q)}(x) = \begin{pmatrix} \text{ch}_3^{(1|1)}(x) & \text{ch}_3^{(1|2)}(x) & \text{ch}_3^{(1|3)}(x) \\ \text{ch}_3^{(2|1)}(x) & \text{ch}_3^{(2|2)}(x) & \text{ch}_3^{(2|3)}(x) \\ \text{ch}_3^{(3|1)}(x) & \text{ch}_3^{(3|2)}(x) & \text{ch}_3^{(3|3)}(x) \end{pmatrix}.$$

Здесь при совпадении индексов у функций  $p$  и  $q$  будем иметь *диагональные вещественные гиперболические функции*, а при несовпадении  $p$  и  $q$  - *недиагональные вещественные гиперболические функции*.

Из этих вещественных функций можно выделить один *главный гиперболический синус* и один *главный гиперболический косинус* порядка 3

$$\text{sh}_3(x) \equiv \text{sh}_3^{(1|1;1|1)}(x) = \frac{1}{2}(\exp_3^{(1|1)}(x) - \exp_3^{(1|1)}(-x));$$

$$\text{ch}_3(x) \equiv \text{ch}_3^{(1|1;1|1)}(x) = \frac{1}{2}(\exp_3^{(1|1)}(x) + \exp_3^{(1|1)}(-x)).$$

Вещественно-комплексные гиперболические синусы и косинусы комбинируют из одной вещественной экспоненты и одной комплексной экспоненты, которых будет по  $2 \times 3 \times 6 = 36$  синусов и косинусов

Комплексные гиперболические синусы и косинусы комбинируют из комплексных экспонент, которых будет всего по  $6 \times 6 = 36$  синусов и косинусов.

Все гиперболические синусы и косинусы можно представить в виде четырёхмерных матриц, которые можно записать так

$$\text{sh}_3^{(p|\mu; q|\alpha)}(x) = \begin{pmatrix} \text{sh}_3^{(1|\mu; 1|\alpha)}(x) & \text{sh}_3^{(1|\mu; 2|\alpha)}(x) & \text{sh}_3^{(1|\mu; 3|\alpha)}(x) \\ \text{sh}_3^{(2|\mu; 1|\alpha)}(x) & \text{sh}_3^{(2|\mu; 2|\alpha)}(x) & \text{sh}_3^{(2|\mu; 3|\alpha)}(x) \\ \text{sh}_3^{(3|\mu; 1|\alpha)}(x) & \text{sh}_3^{(3|\mu; 2|\alpha)}(x) & \text{sh}_3^{(3|\mu; 3|\alpha)}(x) \end{pmatrix};$$

$$\text{ch}_3^{(p|\mu; q|\alpha)}(x) = \begin{pmatrix} \text{ch}_3^{(1|\mu; 1|\alpha)}(x) & \text{ch}_3^{(1|\mu; 2|\alpha)}(x) & \text{ch}_3^{(1|\mu; 3|\alpha)}(x) \\ \text{ch}_3^{(2|\mu; 1|\alpha)}(x) & \text{ch}_3^{(2|\mu; 2|\alpha)}(x) & \text{ch}_3^{(2|\mu; 3|\alpha)}(x) \\ \text{ch}_3^{(3|\mu; 1|\alpha)}(x) & \text{ch}_3^{(3|\mu; 2|\alpha)}(x) & \text{ch}_3^{(3|\mu; 3|\alpha)}(x) \end{pmatrix}.$$

В этих матрицах каждый элемент сам является матрицей  $3 \times 3$ . Элементы с индексами  $\alpha = \mu = 1$  соответствуют вещественным функ-

циям. Если один из индексов  $\alpha$  и  $\mu$  равен 1, а другой равен 2 или 3, то тогда функции будут вещественно-комплексные. Если оба из индексов  $\alpha$  и  $\mu$  равны 2 или 3, то тогда функции будут комплексные.

Из данных гиперболических функций можно скомбинировать гиперболические тангенсы и гиперболические котангенсы порядка 3 [2], которых будет по  $6561=81 \times 81$  и которые можно представить в виде восьмимерных матриц

$$\operatorname{th}_3^{\begin{pmatrix} p|\mu; q|\alpha \\ l|\beta; k|\gamma \end{pmatrix}}(x) = \frac{\operatorname{sh}_3^{(p|\mu; q|\alpha)}(x)}{\operatorname{ch}_3^{(l|\beta; k|\gamma)}(x)}; \operatorname{cth}_3^{\begin{pmatrix} l|\beta; k|\gamma \\ p|\mu; q|\alpha \end{pmatrix}}(x) = \frac{\operatorname{ch}_3^{(l|\beta; k|\gamma)}(x)}{\operatorname{sh}_3^{(p|\mu; q|\alpha)}(x)}; p, q, l, k, \mu, \alpha, \nu, \gamma = 1, 2, 3$$

Аналогично можно ввести и обратные гиперболические функции.

### Литература

1. Чуриков В.А. Особенности некоторых элементарных функций дробного анализа целочисленных порядков // Труды VII Международной конференции студентов и молодых учёных: Перспективы развития фундаментальных наук. Россия, Томск, 20 - 23 апреля 2010 г. с 536-537 (VII International Conference "Prospects of fundamental sciences development". Russia, Tomsk, April 26 - 29, 2010. pp. 536-537.

2. Чуриков В.А. Некоторые элементарные функции анализа порядка 3 // Сборник материалов Четвертой Всероссийской молодежной научно-инновационной школы «Математика и математическое моделирование», г. Саров, СарФТИ НИЯУ МИФИ, 19 - 22 апреля 2010, г. Саров: Альфа, 2010 - С. 27-30. Всего 270 с.

## Тригонометрические функции дробного анализа целочисленного порядка 3

**Чуриков В.А.**

Томский политехнический университет,  
E-mail: vachurikov@list.ru

Тригонометрические функции в целочисленном порядке 3 выражаются через экспоненты целочисленного порядка 3 по формуле обобщающей формулу стандартного анализа

$$\sin_3^{(p|\mu; q|\alpha)}(x) = \frac{1}{2i} (\exp_3^{(p|\mu)}(ix) - \exp_3^{(q|\nu)}(-ix));$$

$$\cos_3^{(p|\mu; q|\nu)}(x) = \frac{1}{2} (\exp_3^{(p|\mu)}(ix) + \exp_3^{(q|\nu)}(-ix)); p, q, \mu, \nu = 1, 2, 3.$$

Из этих экспонент можно скомбинировать  $81=9 \times 9$  тригонометрических синусов и  $81$  тригонометрических косинусов порядка  $3$ .

В зависимости от корней инвариантности  $\alpha_1 = 1; \alpha_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \alpha_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ , можно выделить вещественные, вещественно-комплексные и комплексные тригонометрические синусы и косинусы.

Вещественные функции являются линейными комбинациями вещественных экспонент. Всего будет по  $9$  *вещественных тригонометрических синусов* и *вещественных тригонометрических косинусов* порядка  $3$

$$\sin_3^{(p;q)}(x) \equiv \sin_3^{(p1;q1)}(x) = \frac{1}{2i}(\exp_3^{(p1)}(ix) - \exp_3^{(q1)}(-ix));$$

$$\cos_3^{(p;q)}(x) \equiv \cos_3^{(p1;q1)}(x) = \frac{1}{2}(\exp_3^{(p1)}(ix) + \exp_3^{(q1)}(-ix)).$$

Эти функции легко представить в виде квадратных матриц  $3 \times 3$

$$\sin_3^{(p;q)}(x) = \begin{pmatrix} \sin_3^{(11)}(x) & \sin_3^{(12)}(x) & \sin_3^{(13)}(x) \\ \sin_3^{(21)}(x) & \sin_3^{(22)}(x) & \sin_3^{(23)}(x) \\ \sin_3^{(31)}(x) & \sin_3^{(32)}(x) & \sin_3^{(33)}(x) \end{pmatrix};$$

$$\cos_3^{(p;q)}(x) = \begin{pmatrix} \cos_3^{(11)}(x) & \cos_3^{(12)}(x) & \cos_3^{(13)}(x) \\ \cos_3^{(21)}(x) & \cos_3^{(22)}(x) & \cos_3^{(23)}(x) \\ \cos_3^{(31)}(x) & \cos_3^{(32)}(x) & \cos_3^{(33)}(x) \end{pmatrix}.$$

Здесь при совпадении индексов у функций  $p$  и  $q$  будем иметь *диагональные вещественные тригонометрические функции*, а при несовпадении  $p$  и  $q$  - *недиагональные вещественные тригонометрические функции*.

Из этих вещественных функций можно выделить один *главный тригонометрический синус* и один *главный тригонометрический косинус* порядка  $3$

$$\sin_3(x) \equiv \sin_3^{(11;11)}(x) = \frac{1}{2}(\exp_3^{(11)}(ix) - \exp_3^{(11)}(-ix));$$

$$\cos_3(x) \equiv \cos_3^{(11;11)}(x) = \frac{1}{2}(\exp_3^{(11)}(ix) + \exp_3^{(11)}(-ix)).$$

Вещественно-комплексные тригонометрические синусы и косинусы комбинируют из одной вещественной экспоненты и одной

комплексной экспоненты, которых будет всего по  $2 \times 3 \times 6 = 36$  синусов и косинусов.

Комплексные тригонометрические синусы и косинусы комбинируют из комплексных экспонент, которых будет по  $6 \times 6 = 36$  синусов и косинусов.

Все тригонометрические синусы и косинусы можно представить в виде четырёхмерных матриц, которые можно записать так

$$\sin_3^{(p|\mu;q|\alpha)}(x) = \begin{pmatrix} \sin_3^{(1|\mu;1|\alpha)}(x) & \sin_3^{(1|\mu;2|\alpha)}(x) & \sin_3^{(1|\mu;3|\alpha)}(x) \\ \sin_3^{(2|\mu;1|\alpha)}(x) & \sin_3^{(2|\mu;2|\alpha)}(x) & \sin_3^{(2|\mu;3|\alpha)}(x) \\ \sin_3^{(3|\mu;1|\alpha)}(x) & \sin_3^{(3|\mu;2|\alpha)}(x) & \sin_3^{(3|\mu;3|\alpha)}(x) \end{pmatrix};$$

$$\cos_3^{(p|\mu;q|\alpha)}(x) = \begin{pmatrix} \cos_3^{(1|\mu;1|\alpha)}(x) & \cos_3^{(1|\mu;2|\alpha)}(x) & \cos_3^{(1|\mu;3|\alpha)}(x) \\ \cos_3^{(2|\mu;1|\alpha)}(x) & \cos_3^{(2|\mu;2|\alpha)}(x) & \cos_3^{(2|\mu;3|\alpha)}(x) \\ \cos_3^{(3|\mu;1|\alpha)}(x) & \cos_3^{(3|\mu;2|\alpha)}(x) & \cos_3^{(3|\mu;3|\alpha)}(x) \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент матриц является матрицей  $3 \times 3$ . Элементы с индексами  $\alpha = \mu = 1$  соответствуют вещественным функциям. Если один из индексов  $\alpha$  и  $\mu$  равен 1, а другой равен 2 или 3, тогда функции будут вещественно-комплексные. Если оба из индексов  $\alpha$  и  $\mu$  равны 2 или 3, то тогда функции будут комплексные.

Из данных тригонометрических функций можно скомбинировать тригонометрические тангенсы и тригонометрические котангенсы порядка 3, которых будет по  $6561 = 81 \times 81$  и которые можно представить в виде восьмимерных матриц

$$\operatorname{tg}_3^{\begin{pmatrix} p|\mu;q|\alpha \\ l|\beta;k|\gamma \end{pmatrix}}(x) = \frac{\sin_3^{(p|\mu;q|\alpha)}(x)}{\cos_3^{(l|\beta;k|\gamma)}(x)}; \operatorname{ctg}_3^{\begin{pmatrix} l|\beta;k|\gamma \\ p|\mu;q|\alpha \end{pmatrix}}(x) = \frac{\cos_3^{(l|\beta;k|\gamma)}(x)}{\sin_3^{(p|\mu;q|\alpha)}(x)}; p, q, l, k, \mu, \alpha, \nu, \gamma = 1, 2, 3$$

Здесь введены обобщения формул стандартного анализа, связывающие тригонометрические тангенсы и котангенсы с тригонометрическими синусами и косинусами.

Аналогично можно ввести и обратные функции для рассмотренных тригонометрических функций.

# СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ»

## Задача сверхзвукового обтекания затупленного тела

**Бахметьев А.В.**

**Научный руководитель: ст.н.с. Гольдин В.Д.**

Томский государственный университет

E-mail: [sasha1500@ngs.ru](mailto:sasha1500@ngs.ru)

Задача сверхзвукового обтекания затупленных тел часто встречается в природе и технике. Эти задачи, в основном, возникают при исследованиях входа тела в атмосферу. В технике такие расчеты ведутся при конструировании ракетно-космической техники, расчете движения артиллерийских снарядов и прогнозировании движения метеоров и метеоритов в атмосфере. Основным интерес при исследовании представляет определение силового и теплового взаимодействия атмосферы на движущееся в нем тело.

Наиболее общей математической моделью, описывающей течение газа около обтекаемого тела является система уравнений Навье-Стокса. Для скоростей обтекания, много больших скорости звука, упрощение этой системы приводит к модели вязкого ударного слоя, которая не требует разбиения течения на невязкую область и пограничный слой.

В работе рассматривается постановка задачи для уравнений вязкого ударного слоя при обтекании осесимметричного затупленного тела со сверхзвуковой скоростью. Решение ищется в ударном слое – области, ограниченной поверхностью тела и ударной волной. На поверхности тела компоненты скорости равны нулю и задано значение температуры. На ударной волне используются обобщенные условия Ренкина-Гюгонио.

Построен алгоритм решения задачи, являющийся вариантом метода глобальных итераций. При численном решении задачи используется конечно-разностная схема И.В.Петухова, имеющая 4-й поряд-



док аппроксимации по нормальной к телу координате и 1-й – по продольной координате.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тирский Г. А. - Известия Высших Учебных Заведений: Физика.– 1993.– N4.–с.5-25
2. Лунев В. В. Течение реальных газов с большими скоростями / В.В. Лунев М.: Физматлит, 2007.–759 с.: ил.
3. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы/ М.: Наука 1964.–с.304–325
4. Рогов Б. В., Калиткин Н. Н. - Математическое моделирование/ М. 1999.– т.11. – N4.–с.95–117

## **Методы численного интегрирования и их применение к расчету функции пропускания**

**Бузаев С.С.**

**Научный руководитель: внс, д.ф.-м.н. Родимова О.Б.**

Томский государственный университет

Е-mail: [veronic@sibmail.com](mailto:veronic@sibmail.com)

Расчет функции пропускания необходим при решении многих задач, связанных с распространением излучения в молекулярных средах. Наиболее точным методом расчета функции пропускания является метод line-by-line. Теоретически этот метод позволяет рассчитывать функции пропускания для любого спектрального интервала с любой точностью. Практически же, затраты машинного времени существенно возрастают из-за увеличения числа линий и величины интервала интегрирования, так что использование методов прямого счета для больших спектральных интервалов нецелесообразно. Поэтому для сокращения времени расчетов в настоящее время чаще всего используется метод рядов экспонент.

Метод расчета функций пропускания с помощью рядов экспонент позволяет заменить громоздкий интеграл, представляющий функцию пропускания в методе line-by-line, суммой небольшого числа экспоненциальных членов.

Целью настоящей работы было применение стандартных методов численного интегрирования к расчету функции пропускания  $\text{CO}_2$  и сравнение результатов расчета с таковыми, полученными с помощью варианта метода рядов экспонент, предложенного в ИОА.

Описаны стандартные методы численного интегрирования и их применение к расчету функции пропускания  $\text{CO}_2$  в рамках line-by-line метода, проведены оценки точности расчета. Описан метод рядов экспонент и процедуры его реализации.

Результаты сравнения различных методов расчета функции пропускания показывают, что, какую бы точность ни давали оценки по стандартным формулам, расчет с небольшим числом узлов интегрирования не обеспечивает точности, требуемой радиационными расчетами. Метод рядов экспонент не требует большого времени расчета и дает нужную точность.

## **Моделирование коаксиального магнитоплазменного ускорителя на основе электротехнической схемы замещения**

**Сивков А.А., Исаев Ю.Н., Герасимов Д.Ю., Васильева О.В.**

**Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. Исаев Ю.Н.**

Томский политехнический университет

E-mail: [vasileva.o.v@mail.ru](mailto:vasileva.o.v@mail.ru)

В качестве моделируемого электротехнического устройства в работе рассматривается коаксиальный магнитоплазменный ускоритель (КМПУ). КМПУ используются для получения ультрадисперсных порошков металлов, нанесения различных функциональных покрытий, получения рабочего материала эрозионным путем с поверхности электродов в процессе рабочего цикла. Математическое моделирование позволяет выявить детальные явления, которые физически невозможно наблюдать в экспериментальных исследованиях.

Предложена математическая модель для исследования процессов, происходящих в КМПУ, на основе использования электротехнической схемы замещения с описанием различного влияния величины индуктивности индуктора.

Представлен алгоритм расчета индуктивности сложной электродной системы на основе расчета энергии магнитостатического поля методом конечных элементов.

При расчете векторного магнитного использовалось уравнение Пуассона в цилиндрической системе координат.

Предложена модель потенциального барьера, позволяющая учитывать упругое отражение частиц о стенки плазматрона методом Рунге-Кутты с предварительным сведением нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка к уравнениям первого порядка для повышения точности решения [1].

Составлена система уравнений равновесия напряжения и тока в цепи и увязана с механическими процессами в системе, пользуясь электротехнической схемой замещения ускорителя. Для этого использован формализм Лагранжа.

Рассчитан баланс энергии и дано полное представление об относительных вкладах различных видов энергий.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зализняк В.Е. Основы вычислительной физики. Часть 1. Введение в конечно-разностные методы. – М.: Техносфера, 2008. – 224с.

## **Исследование возможности применения метода SVM при прогнозировании свойств нано-пленок**

**Горкун Д.А.**

**Научный руководитель: стар. преподаватель Каминская Е.В.**

Томский государственный университет

E-mail: [ya.vion@yandex.ru](mailto:ya.vion@yandex.ru)

В различных областях человеческой деятельности (химии, экономике, медицине, бизнесе и др.) повседневно возникает необходимость решения задач анализа, прогноза и диагностики, выявления скрытых зависимостей и поддержки принятия оптимальных решений.

Пусть проведена серия химических экспериментов по получению и изучению свойств нано-пленок с различным содержанием компонентов  $SiO_2$ ,  $P_2O_5$ ,  $CaO$ ,  $Na_2O$ , каждой пленке ставится в соответствие вектор признаков с процентным содержанием химиче-

ских элементов, толщиной. Пленки с коэффициентами преломления, лежащими в интервале [1.41, 1.44] отнесены к одному классу, остальные пленки считаются принадлежащими другому классу. На вход алгоритма классификации поступает новая пленка. Необходимо указать к какому из классов она принадлежит.

В зависимости от присутствия  $Na_2O$  в соединении множество экспериментов делится на трехкомпонентные и четырехкомпонентные. Исследуем обучающую выборку трехкомпонентных нанопленок на разделимость методами машинной классификации.

Поставленная задача классификации в трехмерном пространстве  $SiO_2, P_2O_5, CaO$  решения не имеет.

Рассмотрим двумерные пространства, образованные векторами концентраций реагентов. Для того чтобы множество экспериментов по выращиванию трехкомпонентных смесей являлось разделимым на два непересекающихся класса необходимо и достаточно, чтобы его компоненты были разделимы в пространствах  $SiO_2, P_2O_5$ ;  $SiO_2, CaO$ ;  $P_2O_5, CaO$ ;  $SiO_2, Na_2O$ .

## **Численное моделирование процессов самоочищения реки Томи с учетом характеристик течения**

**Громова В.В.**

**Научный руководитель: ст.преподаватель каф.ВМиКМ ММФ**

**ТГУ Михайлов М.Д.**

Томский государственный университет

E-mail: [voron\\_4@list.ru](mailto:voron_4@list.ru)

Рассматривается обобщение модели Стритера-Фелпса с учетом процессов нитрификации на двумерный случай [1]. Предлагается введение биофильтра в указанную модель для ускорения самоочищения речной воды. Для этого в уравнение изменения концентрации органического вещества вносится значение скорости разложе-

$$k = 10 \cdot \alpha \cdot \beta,$$

ния органического вещества в биофильтре:  $\Phi_2 = \frac{H \cdot B_{yw}^{0.6} \cdot k_1}{q}$ , где  $k_1$

- коэффициент разложения органического вещества при самоочищении,  $\alpha$ ,  $\beta$  - постоянные коэффициенты,  $H$  - высота слоя загрязочного материала,  $B_{y0}$  - расход подаваемого воздуха,  $q$  - гидравлическая нагрузка.

В качестве численного метода используется метод, основанный на использовании неявной разностной схемы [1].

Результаты расчетов представлены в виде графиков, анализ которых показывает совпадение с результатами расчетов в одномерном случае и с экспериментом.

Кроме того, изучается одномерная модель процесса распространения загрязнения в речных водоемах с учетом турбулентных характеристик течения [2].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Громова В.В., Михайлов М.Д. Численное исследование процесса самоочищения загрязненного участка реки//Материалы Всероссийской научной конференции «СПММ». – Томск, 2010, с.60-63.
2. В.Роди Модели турбулентности окружающей среды//Методы расчета турбулентных течений. – М.: Мир, 1984.

## **Модифицированный попеременно-треугольный метод решения третьей краевой задачи для уравнения эллиптического типа**

**Гронская А.А.**

**Научный руководитель: старший препод. Лаева В.И.**

Томский Государственный Университет

E-mail: [amilena@sibmail.com](mailto:amilena@sibmail.com)

Для решения разностных уравнений существует много различных численных методов. Одним из эффективных итерационных методов решения является модифицированный попеременно-треугольный метод [1]-[2]. Этот метод указывает выбор итерационных параметров и дает оценку для числа итераций, причем теория использует минимум информации относительно операторов итерационной схемы.

В данной работе рассматривается решение третьей краевой задачи для эллиптического уравнения в прямоугольнике с сильно меняющимися коэффициентами. Предполагается, что соответствующие коэффициенты в дифференциальном уравнении имеют конечное число точек разрыва. Разностная третья краевая задача сводится к задаче Дирихле в расширенной области, для которой исходная область является внутренней. Полученная первая краевая разностная задача в расширенной области решается модифицированным попеременно-треугольным методом.

При решении третьей краевой задачи модифицированным попеременно-треугольным методом, число итераций, как и в случае первой краевой задачи, слабо зависит от экстремальных характеристик коэффициентов разностного уравнения. Описанный прием сведения к задаче Дирихле можно использовать и в том случае, когда на каждой стороне прямоугольника задано одно из краевых условий первого, второго или третьего рода.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кучеров А.Б., Николаев Е.С. Попеременно - треугольный итерационный метод решения сеточных эллиптических уравнений в произвольной области // ЖВМ и МФ, т. 17, № 3, 1977, с.664-675.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений - М.: Наука, 1978, - 595с.

## **Вейвлет-методы скоростного проектирования ремонтных автомобильных дорог**

**Губская М.М.**

**Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. Шумилов Б.М.**

Томский государственный университет

E-mail: [mary\\_rus@sibmail.com](mailto:mary_rus@sibmail.com)

Работа с дорогами включает 3 этапа: 1 – классический метод трассирования (прокладывание трассы с помощью прямых, окружностей и клотоид), 2 – реконструкция трассы (перевод трассы в более высокую категорию), здесь можно использовать и сплайн-трассирование [1], 3 – видеопаспортизация и диагностика трассы с целью ремонта [2].

3-й этап требует скоростного проектирования для более точного и быстрого определения ремонтных работ. Видеопас-портизация производится с помощью лазерного сканирования передвижной дорожной лаборатории. Полученные данные требуют предварительной обработки: 1. необходимо очистить данные от шумов и помех, лежащих за пределами проезжей части и непосредственно на ней; 2. ограничить количество точек, оставив значимые.

Далее предлагается вейвлет-трассирование поперечников автомобильной дороги, поскольку при «натягивании» сплайновой сетки появляются лишние узлы на месте неповрежденной поверхности дорожного полотна, чего можно избежать с помощью вейвлетов. При использовании вейвлет на месте выбоин или бугров будет наблюдаться загромождение сетки.

Автоматизация данных процессов позволит значительно ускорить проектирование ремонта дорог с минимальными затратами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бойков В.Н., Шумилов Б.М. Сплайны в трассировании автомобильных дорог. – Томск: изд-во ГУ Томский ЦНТИ 2001.–164с.
2. Система видеопаспортизации дорог. Основные концепции. НПО Регион, 1993-2001.–100с.

## **Численное решение задачи о движение жидкости в каверне на компьютерах с параллельной архитектурой**

**Деги Д.В.**

**Научный руководитель: профессор, д.ф.м.н. Старченко А.В.**

Томский государственный университет

E-mail: [dimadegi@sibmail.com](mailto:dimadegi@sibmail.com)

На сегодняшний день для решения прикладных задач с большим объемом вычислений широко используются компьютеры с много-процессорной архитектурой. Системы с общей памятью, графические процессоры и системы с распределенной памятью позволяют получать довольно быстрые решения задач по сравнению со стандартными ЭВМ фон-неймановской архитектуры.

Численное решение задач гидродинамики на сетках большой размерности (более миллиона узлов) требует выполнения большого числа арифметических действий. В данной работе решается на представленных системах классическая задача гидродинамики, а именно движение жидкости в каверне.

Верхняя стенка движется с постоянной скоростью. Жидкость, целиком заполняющая каверну, вовлекается в движение силами вязкости. Такая постановка, будучи геометрически простой, позволяет отразить многие характерные черты задач, описываемых уравнениями Навье–Стокса: конвективную нелинейность, одновременное существование областей малых и больших градиентов и т.д., благодаря чему задача о каверне распространена в качестве «тестовой» при численном моделировании.

Для численного решения задачи была построена разностная схема с помощью метода конечных объемов. При нахождении неизвестных (скорости и давления) использовалась шахматная сетка. Для аппроксимации конвективных членов применялась схема против потока.

Решение поставленной задачи получено с помощью параллельной реализации алгоритма SIMPLE[1]. Основной объем вычислений приходится на нахождение давления и компонент вектора скорости. Данные сеточные уравнения решались двумя методами: методом релаксации (вариант красно-черного упорядочивания) и методом сопряженных градиентов.

Показано, что применение этих методов позволяет эффективно решать задачу на различных системах с многоядерной архитектурой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Патанкар С Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости/ С. Патанкар. – М.: Энергоатомиздат, 1984, 124с.
2. Левин М.П. Параллельное программирование с использованием системы OpenMP./ М.П. Левин. – М.: БИНОМ, 2008, 118с.
3. Боресков А.В., Харламов А.А. – Основы работы с технологией CUDA./ А.В. Боресков – М. : ДМК Пресс, 2010, 232с.



# **Численный метод решения задачи сопряжённого теплообмена в двумерной постановке на многоядерной системе с общей памятью**

**Дербышев П. А.**

**Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор А. В. Старченко**

Томский государственный университет

Е-mail: [kain20@sibmail.com](mailto:kain20@sibmail.com)

Рассматривается задача Дирихле для уравнения стационарной теплопроводности в полой балке прямоугольного поперечного сечения с граничными условиями первого рода. Данная задача решалась методом конечных объёмов. Заменяя непрерывную область определения решения дискретной и аппроксимируя дифференциальную задачу конечно-разностной, получаем систему сеточных уравнений. Для решения разностных уравнений используется метод верхней релаксации. Получены условия аппроксимации и устойчивости разностной схемы. Для ускорения вычислительного процесса разработки параллельных программ в стандарте Open MP. Исследованы вопросы сходимости и ускорения параллельных программ в зависимости от числа используемых процессоров. Результаты выполненных вычислительных экспериментов демонстрируют, что распараллеливание программы дало значительный прирост в скорости выполнения, на прямую зависящий от количества процессоров на ЭВМ: т.е при распараллеливании на ЭВМ с двумя процессорами наблюдается прирост скорости выполнения примерно в 2 раза, на 4-х процессорной ЭВМ в 4 раза и т.д.

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Исаченко В. П., Осипова В. А., Сухомел А. С. Теплопередача С. 7-20; 22-24;
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Метод переменных направлений//Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. С.432-459
3. Старченко А. В., Есаулов А. В., Параллельные вычисления на МВС
4. Высокопроизводительные вычисления на кластерах

## Численное исследование математических моделей биологической очистки сточных вод

Дорожук Е.В., Абеляшев Д.Г.

**Научный руководитель: старший препод., Михайлов М.Д.**

Томский государственный университет

E-mail: [e\\_lenochka@sibmail.com](mailto:e_lenochka@sibmail.com)

Рассмотрим математические модели, описывающие динамику роста микроорганизмов  $X$  и потребление субстрата  $L$ . Удельную скорость роста бактерий Моно предложил задавать формулой [1]:

$$\mu = \frac{\mu_m L}{K_L + L}, \quad (1)$$

где  $\mu_m$  – максимальная удельная скорость роста бактерий;  $K_L$  – константа полунасыщения. Ранее рассматривались модификации модели Моно [2] и ее пространственная реализация [3], которые учитывают самые общие явления, такие, как рост и отмирание бактерий, насыщение скорости роста по субстрату и т.д. В системе с хлопьями активного ила одновременно с процессами биоокисления протекают процессы «сорбции»:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} + U \frac{\partial L}{\partial y} &= \Gamma_1 \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} - kL(X_c^* - X_c); \\ \frac{\partial X_c}{\partial t} + U \frac{\partial X_c}{\partial y} &= \Gamma_2 \frac{\partial^2 X_c}{\partial y^2} + kL(X_c^* - X_c) - \frac{1}{Y} \mu(X_c)X_a; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial X_a}{\partial t} + U \frac{\partial X_a}{\partial y} = \Gamma_3 \frac{\partial^2 X_a}{\partial y^2} + \mu(X_c)X_a;$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial y} \right|_0 = \left. \frac{\partial L}{\partial y} \right|_d = 0; \quad \left. \frac{\partial X_c}{\partial y} \right|_0 = \left. \frac{\partial X_c}{\partial y} \right|_d = 0; \quad \left. \frac{\partial X_a}{\partial y} \right|_0 = \left. \frac{\partial X_a}{\partial y} \right|_d = 0;$$

$$L(0) = L^0; X_c(0) = X_c^0; X_a(0) = X_a^0; t \in [0, T]; y \in [0, d];$$

где  $L, X_c, X_c^*, k, X_a, Y$  – можно найти в [1];  $\mu(X_c)$  – задаем формулой (1). Проведена численная реализация модели (2) с использованием явной разностной схемы, которая исследована на аппроксимацию, устойчивость и сходимости. Решение задачи осуществлялось с помощью параллельного алгоритма - декомпозиция с наложением - на многопроцессорной вычислительной системе. Проведен анализ полученных результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вавилин В.А. Нелинейные модели биологической очистки и процессов самоочищения в реках, М: Наука, 1983,-156 с.
2. Дорошук Е.В., Михайлов М.Д. Математическое моделирование процессов биологической очистки сточных вод на примере моделей типа Моно // Современные проблемы математики и механики: Материалы Всерос. молод. науч. конф. (Томск, 13-15 октября 2010). Томск: Изд-во Том. Ун-та, 2010. С. 74-76.
3. Дорошук Е.В., Михайлов М.Д. Математическое моделирование процессов самоочищения сточных вод // Материалы докладов 16-ой Всерос. науч.-техн. конф. «Энергетика: экология, надежность, безопасность».- Томск: Изд-во ТПУ, 2010. С.184-187.

## **Метод динамической адаптации и его применение для решения некоторых задач газовой динамики.**

**Дучко А.Н.**

**Научный руководитель: ст. н. сотр. Гольдин В.Д.**

Томский государственный университет

Е-mail: [Andrey777-Duchko@rambler.ru](mailto:Andrey777-Duchko@rambler.ru)

Использование адаптивных сеток для решения задач математической физики позволяет добиться существенного повышения точности в тех случаях, когда решение сильно зависит от формы области и имеет нерегулярный характер (расчет сверхзвуковых течений, ударных волн и т. п.). Адаптация заключается в сгущении сетки в окрестности особенностей, что позволяет использовать однородные вычислительные алгоритмы, когда расчет в каждой точке проводится по единой схеме.

В основу метода динамической адаптации[1] положена идея перехода к произвольной нестационарной системе координат, в которой неизвестными являются не только сеточные функции, но и координаты узлов сетки. Преобразование координат осуществляется автоматически с помощью искомого решения. Обратное преобразование задается в виде дифференциального уравнения в частных производных, из решения которого определяются координаты узлов. Уравнение составляется таким образом, что скорость движения узлов зависит от эволюции решения уравнений, описывающих физические процессы.

Связав движение системы координат с особенностями решения, задаваемых в виде некоторой функции  $Q$  уравнение обратного преобразования в одномерном случае имеет вид:

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = -Q \quad (3)$$

Данный метод адаптации разностной сетки совместно с методом С.К. Годунова[2] применяется для решения уравнений Эйлера, описывающих одномерное течение сжимаемого газа.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. П.В. Бреславский, В.И. Мажукин – Математическое моделирование. – 1995. – т. 7. – №12. – С. 48-78.
2. С.К. Годунов и др. – Численное решение многомерных задач газовой динамики. – Наука. – 1976. – 400с.

## Исследование многоугольных чисел с помощью системы «Mathematica»

**Зоркальцева М. Ю.**

**Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Зюзьков В. М.**

Томский государственный университет

E-mail: [fear2029@sibmail.com](mailto:fear2029@sibmail.com)

Многоугольные числа – это положительные целые числа, которые могут быть представлены правильными многоугольниками.

В данной работе с помощью системы «Mathematica» исследуются свойства многоугольных чисел. Основной метод исследования – система «Mathematica». Она используется как эвристический инструмент для выдвижения гипотез, потом эти гипотезы доказываются. Устанавливаются соотношения между различными видами многоугольных чисел (треугольными, квадратными, пятиугольными и т. д.), определяются достаточные условия, при которых натуральное число является многоугольным.

Для описания всего множества многоугольных чисел использовались производящие функции. Бесконечную последовательность

$\langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  удобно записать с помощью формального

ряда  $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ , его называют производящей функцией для данной последовательности.

В общем случае, найденная производящая функция для многоугольного числа будет выглядеть так:

$$\frac{rx - 3x + 1}{(x - 1)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} m(r, n)x^n$$

С помощью вышеупомянутой системы была доказана общая формула для многоугольных чисел, найдены производящие функции, доказаны ряды тождеств, сделаны соответствующие демонстрации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Thomas Koshy Elementary Number Theory with Applications. – Elsevier Inc, 2007. – 801 с.
2. Кнут Д., Грэхем Р. Конкретная математика. – М.: «Мир», 1998. – 703 с.
3. Воробьев Е. М. Введение в систему «Математика». – СПб: Питер, 2003. – 261 с.

## Исследование криптографических свойств стандарта AES

**Иванов А.С.**

**Научный руководитель: ст. преподаватель Каминская Е.В.**

Томский государственный университет

E-mail: [alekseyiw@gmail.com](mailto:alekseyiw@gmail.com)

Стандарт шифрования AES (Advanced Encryption Standard) был принят 26 мая 2002 г. и заменил алгоритм DES (Data Encrypt Standard)[1], который существовал с 1977 г. AES базируется на Rijndael алгоритме [2].

В работе исследуется вопрос о существовании слабых ключей в стандарте AES. Слабыми считаются ключи, использование которых ведёт к плохому преобразованию входных данных, то есть недостаточному рассеиванию или перемешиванию. Алгоритм AES проек-

тировался с учетом основных атак на DES. Так, например, в стандарте DES слабым ключом считают ключ, состоящий из одних нулей [1]. Принцип построения раундовых ключей в AES таков, что уже на 3 раунде значения байт раундового ключа становятся различными (табл. 1).

| Номер раунда | Значение ключа   |
|--------------|--|
| Входной ключ | 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0                                 |
| 1-ый раунд   | 98, 98, 98, 98, 99, 99, 99, 99, 99, 99, 99, 99, 99, 99, 99, 99                 |
| 2-ой раунд   | 155, 249, 155, 249, 152, 251, 152, 251, 152, 251, 152, 251, 201, 170, 201, 170 |
| 3-ий раунд   | 144, 105, 242, 11, 151, 108, 244, 15, 52, 207, 87, 172, 80, 250, 51, 153       |

Таблица 1. Изменение значений байт раундовых ключей AES

Для исследования вопроса о зависимости байтов шифртекста от байтов входного текста проводится следующий эксперимент. Ключ шифра состоит из нулей. Входной блок формируется следующим образом: в первом эксперименте открытый текст имеет вид: ВAAAAAAAAAAAAAAAAA. В каждом последующем эксперименте расположение буквы В меняется в соответствии с номером эксперимента. Анализируется коэффициент корреляции между байтами открытого и шифртекста.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баричев С.Г., Серов Р.Е. «Основы современной криптографии»
2. Зенин О.С., Иванов М.А. «Стандарт криптографической защиты – AES. Конечные поля.», 2002 г.

## **Математическое моделирование аэродинамики в помещении для различных схем от- вода и подвода воздуха**

**Ирискина Е.Н.**

**Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. Старченко А.В.**

Томский государственный университет

E-mail: [violet103@yandex.ru](mailto:violet103@yandex.ru)

Здоровье, работоспособность человека в значительной мере определяются состоянием воздушной среды помещений. Создание необходимого микроклимата в помещении является важной задачей, которая может быть успешно решена на основе повышения эффективности системы вентиляции.

В данной работе рассматривается неизотермическое движение воздуха в помещении, один из размеров которого больше двух других, что позволяет рассматривать исследуемые процессы в 2D приближении. Помещение представляет собой прямоугольную область. Имеется три случая подачи и отвода потока воздуха. В помещении имеются источники тепла. Теплофизические свойства среды принимаются постоянными. Плотность воздуха зависит от температуры лишь при описании плавучести.

Математическая постановка рассматриваемой задачи включает двумерные стационарные дифференциальные уравнения, выражающие законы сохранения массы, импульса, энергии для газовой среды помещения. В работе учитывается турбулентный перенос, описываемый с помощью  $k - \varepsilon$  модели и метода пристеночных функций Лаундера – Сполдинга, с учетом плавучести в приближении Буссинеска. Для компонент скорости на твердых границах задаются условия непротекания и прилипания, на входной границе – значения всех зависимых переменных, на выходной границе – простые градиентные условия. Для температуры на твердых границах – условия термоизоляции.

Выбор сетки и построение дискретного аналога дифференциального уравнения осуществляется методом конечного объема.

Построенная в работе модель была применена для определения поля скоростей турбулентного течения воздуха, при различных схемах расположения входного и выходного отверстий. Рассмотрено

влияние скорости поступающего воздуха для различных схем вентилирования.

## Разностные схемы на графах

Кондратюк С.В.

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Берцун В.Н.

Томский государственный университет

[ksv471@yandex.ru](mailto:ksv471@yandex.ru)

При тепловом проектировании различных элементов конструкций часто возникает задача оценки влияния отдельных элементов оборудования на тепловое состояние всей системы. Некоторые из этих элементов могут иметь графовую структуру. В работе рассматривается система, состоящая из четырёх тонких стержней с изолированной боковой поверхностью, выполненных из различных материалов. Стержни соединены так, что они образуют граф [1], изображенный на рис. 1. Требуется определить тепловое состояние системы, как решение следующей краевой задачи

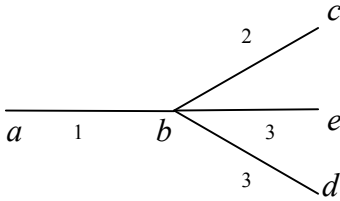


Рисунок 1

$$\rho_i c_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = \lambda_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}, i = 1, 2, 3, 4, (1)$$

$$x_1 \in [a, b], x_2 \in [b, c], x_3 \in [b, d], x_4 \in [b, e].$$



$$\left. \begin{aligned}
 \lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=a} &= \alpha_1 (u_1 \Big|_{x_1=a} - T_e), \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_{x_2=c} = \alpha_2 (T_e - u_2 \Big|_{x_2=c}), \\
 \lambda_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \Big|_{x_3=d} &= \alpha_3 (T_e - u_3 \Big|_{x_3=d}), \lambda_4 \frac{\partial u_4}{\partial x_4} \Big|_{x_4=e} = \alpha_4 (T_e - u_4 \Big|_{x_4=e}), \\
 \lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=b} &= \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_{x_2=b} + \lambda_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \Big|_{x_3=b} + \lambda_4 \frac{\partial u_4}{\partial x_4} \Big|_{x_4=b}, \\
 u_1 \Big|_{x_1=b} &= u_2 \Big|_{x_2=b} = u_3 \Big|_{x_3=b} = u_4 \Big|_{x_4=b}, \\
 u_i \Big|_{t=0} &= u_i \Big|_{t=0} = u_i \Big|_{t=0} = u_i \Big|_{t=0} = T_n, t \in [0, T].
 \end{aligned} \right\} (2)$$

Для решения задачи (2) используется двухслойная неявная разностная схема, которая может быть записана в виде

$$Au^{n+1} = f(u^n),$$

где  $A$  – невырожденная трёхдиагональная матрица. Полученная система разностных уравнений решается методом встречных прогонок [2].

При решении систем уравнений на графах с числом вершин  $N \gg 1000$  на кластере возникает проблема балансировки загрузки процессоров, предполагающая разделение графа на домены, веса узлов, которого отражают объёмы вычислений в различных расчетных узлах, а веса ребёр – объёмы обменов данными, выполняемых в процессе счёта между соответствующими узлами [3]. В работе рассматривается метод спектральной бисекции разделения графа, описанный на анализе вектора Фидлера для графа.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Воеводин А. Ф., Шугрин С.М. Методы решения одномерных эволюционных систем. Новосибирск: Наука. 1993. 367 с.
2. Самарский А. А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1992. 591 с.
3. Якобовский М. В. Обработка сеточных данных на распределенных вычислительных системах. <http://lira.imamod.ru/lit/VANT2004.pdf>

## **Исследование сходимости интерполяционного процесса на адаптивных сетках**

**Кононенко А.А.**

**Научный руководитель: ст. преподаватель Меркулова Н.Н.**

Томский государственный университет

E-mail: [kaa483@yandex.ru](mailto:kaa483@yandex.ru)

Интерес к использованию различных разностных сеток при численном решении задач математической физики неуклонно растет. Известно, что использование адаптивных сеток повышает точность расчетов.

В данной работе изучается сходимость интерполяционного процесса для одной функции с применением равномерных, неравномерных, сеток Чебышева и адаптивных сеток[2]. Строится последовательность многочленов Лагранжа на указанных сетках, и в норме пространства  $C$  оценивается погрешность. Показано, что для многочленов Лагранжа первой и второй степени результаты одного порядка на всех сетках, а для многочленов 3-15 степени более точное приближение получается на адаптивной сетке и сетке Чебышева. На всех рассмотренных сетках погрешность имеет порядок  $10^{-14}$ - $10^{-15}$ .

Полученные результаты не носят окончательного характера, поскольку точность приближения на адаптивной сетке может быть улучшена за счет выбора другой весовой функции.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений: учебное пособие/-Томск: ТМЛ-Пресс, 2007.-Ч.II.-288 с.
2. Хакимзянов Г.С. Разностные схемы на адаптивных сетках: учеб. пособие/ Г.С. Хакимзянов, Ю.И. Шокин.-Новосиб.: Новосибир. гос. университет., 2005.-ч.1-192 с.

## Построение эрмитового кубического сплайна на основе базисных функций

**Косова О.Н.**

**Научный руководитель: Каминская Е.В.**

Томский государственный университет

Email: [kosova-olga\\_89@mail.ru](mailto:kosova-olga_89@mail.ru)

В работе рассматривается построение локального кубического эрмитового сплайна на основе базисных функций, отличных от В-базиса, вида:

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i B_i(x), \quad (1)$$

где в качестве  $B_i(x)$  возьмем алгебраические базисные функции  $x_i$ ,  $a_i$  – числовые коэффициенты,  $n=4$ .

Для решения интерполяционной задачи на сетке узлов  $\omega$  необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} S_n(x_i) = f(x_i), \\ S_n'(x_i) = f'(x_i), i = 0, \dots, m-1, m = 2. \end{cases}$$

В работе показано, что данная система имеет единственное решение, подставив которое в (1) и определяя производные через центральные разности, получим:

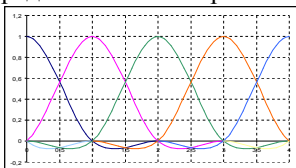
$$S_4(x) = W1(x)f_{i-1} + W2(x)f_i + W3(x)f_{i+1} + W4(x)f_{i+2},$$

где

$$W1(x) = -\frac{(x-x_i)(x-x_2)^2}{2h^3}, W2(x) = \frac{2(x-x_2)^2(2x-3x_1+x_2) + (x-x_1)(x-x_2)}{2h^3},$$

$$W3(x) = \frac{-2(x-x_1)^2(2x+x_1-3x_2) + (x-x_1)(x-x_2)^2}{2h^3}, W4(x) = \frac{(x-x_1)^2(x-x_2)}{2h^3}$$

– базисные функции, представленные на рис. 1.





- Ильин В.П., Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем, - М.:Физматлит, 1995 – 288с.

## **Трехмерное моделирование деформации и разрушения хрупких пористых материалов**

**Логинова Д.С.**

**Научный руководитель: к.ф.-м.н. Коноваленко И.С.**

Томский государственный университет

E-mail: [login4ikova@sibmail.com](mailto:login4ikova@sibmail.com)

Широкое использование пористых материалов предъявляет жесткие требования к их структурным и механическим характеристикам. Таким образом, исследование закономерностей деформации и разрушения хрупких пористых сред в зависимости от их структуры является очень важной и актуальной задачей.

Перспективным для решения обозначенных вопросов, является численное моделирование. Поскольку методы механики сплошной среды встречают ряд трудностей при описании больших деформаций и разрушения материалов, то целесообразным является использование дискретных методов. В данной работе численные исследования производились в рамках метода подвижных клеточных автоматов (МСА). В данном методе материал представляется ансамблем частиц конечного размера, взаимодействующих по определенным правилам, обеспечивающим возможность описывать как различные типы сплошных и пористых материалов, так и процессы разрушения в них. Однако построение моделей пористых сред требует использования большого числа частиц, что приводит к большим вычислительным затратам. Одним из путей эффективной организации вычислительного процесса может быть использование параллельных вычислений на многопроцессорных системах, например с использованием технологии MPI. В связи с этим целью работы являлась реализация MPI-технологии для программного кода трехмерной версии метода подвижных клеточных автоматов (МСА3D) и исследование на ее основе деформации и разрушения пористых сред.

Расчеты проводились для модельного материала со свойствами, спеченной керамики ZrO<sub>2</sub>. Моделировалось одноосное сжатие ку-

бических трехмерных образцов. Осуществлена реализация MPI-программного кода МСА3D. Сравнение результатов тестовых расчетов параллельной и последовательной версий показало корректность MPI-кода. Проведено исследование эффективности и ускорения параллельной версии программы.

## Визуализация распределения простых чисел и Гипотезы Римана

Максимов Г. А.

Научный руководитель: доцент, к.ф.м.н. Зюзьков В.М.

Томский государственный университет

E-mail: [rowuk@yandex.ru](mailto:rowuk@yandex.ru)

При изучении распределения простых чисел, используется сложный математический инструмент такой, как дзета-функция Римана вместе с Гипотезой Римана. В данной работе рассматривается визуализация с помощью системы «Mathematica» основных результатов в этой области.

Риман определил следующую формулу приближенного распределения простых чисел:  $\pi(x) \approx R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} li(x^{1/n})$ , и стал рас-

сматривать функцию  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  с комплексным аргументом, которая имеет единственное аналитическое продолжение на все числа  $s \in \mathbb{C}$ , за исключением  $s = 1$ . Эта функция носит название дзета-функции Римана.

Он также дал явную формулу для точного значения  $\pi_0(x)$ , функции, которая отличается от  $\pi(x)$  только на простых числах:

$\pi_0(\rho) = \pi(\rho) - \frac{1}{2}$  для простых чисел  $\rho$ . Риман нашел, что

$$\pi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J(x^{-n}),$$

где  $J(x) = li(x) - \sum_{\rho} li(x^{\rho}) + \int_0^{\infty} \frac{du}{(u^2 - 1)u \ln u} - \ln 2$ , и суммирование ведется по корням функции  $\zeta(s)$ .

Из этой формулы следует оценка  $\pi(x) = li(x) + O(x^{\theta} \ln x)$ , где  $\theta = \sup \operatorname{Re}(\rho)$ . Гипотеза Римана утверждает, что нетривиальные корни дзета-функции имеют вещественную часть, равной  $\frac{1}{2}$ , из чего следует утверждение:  $\pi(x) = li(x) + O(x^{1/2} \ln x)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

3. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.
4. Хинчин А.Я. Три жемчужины теории чисел. М.: Наука, 1979.

## Применение метода сопряженных градиентов с квазиньютоновской аппроксимацией

**Новосельцева О.В.**

**Научный руководитель: Богословский Н.Н.**

Томский государственный университет.

E-mail: [novoseltseva\\_olesya@mail.ru](mailto:novoseltseva_olesya@mail.ru)

Многие практические и теоретические проблемы, такие как оптимальное распределение ресурсов, поставка сырья, планирование инвестиций, а также, такие задачи как Штейнера, наилучшего приближения сводятся к решению задачи оптимизации. По одному из классификационных признаков оптимизационные задачи можно разделить на безусловную и условную оптимизацию.

В работе рассматривается задача безусловной многомерной оптимизации, которая формулируется следующим образом: найти точку локального минимума  $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in R^n$  целевой функции  $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  на множестве допустимых значе-

ний  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ . Предполагаем, что функция  $f: R^n \rightarrow R$  является дважды непрерывно дифференцируемой.

Для вычисления точки локального минимума выбран метод сопряженных градиентов с квазиньютоновской аппроксимацией [1]. Это эффективный алгоритм минимизации, который использует информацию о второй производной функции  $f(\vec{x})$ . Решение задачи ищется с помощью последовательности линейных поисков:  $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + t_k \vec{d}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , где  $t_k$  – длина шага; а направление поиска  $\vec{d}_k$  определяется по формуле  $\vec{d}_k = -\alpha_k \vec{g}_k + \beta_k \vec{d}_{k-1}$ , где  $\vec{g}_k = \nabla f(\vec{x}_k)$ . Алгоритм вычисления коэффициентов  $\alpha_k, \beta_k$  приведен в работе [1].

Написана программная реализация данного метода, проведены расчеты на тестовой задаче и сравнения с результатами применения других методов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Koko J. A conjugate gradient method with a quasi-Newton approximation // Applicationes Mathematicae. - 2000 - №27. - P. 153-165.

## **Изучение математических моделей вирусного заболевания с применением численных методов**

**Пауль Ю.А.**

**Научный руководитель: Меркулова Н.Н.**

Томский государственный университет

Е-mail: [paul-julii@yandex.ru](mailto:paul-julii@yandex.ru)

Вирусное заболевание описывается системой восьми обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) при соответствующих начальных условиях [1]. Основными участниками иммунного ответа являются:  $F$  – антитела,  $V$  – антигены,  $T$  – лимфоциты-киллеры,



$\Lambda$  – макрофаги,  $C_B$ ,  $C_T$  – плазменные клетки,  $B$  – лимфоциты. В данной модели используется относительная характеристика массы пораженного органа  $m$ . Данная модель имеет два частных случая: когда защита организма ведется только за счет лимфоцитов-киллеров, антитела не вырабатываются ( $M_1$ ); защита организма производится за счет антител ( $M_2$ ).

Модели  $M_1$ ,  $M_2$  были приведены к безразмерному виду, путем ввода масштабных множителей [2]. Были найдены стационарные решения и исследованы на устойчивость. При этом были получены ограничения на подбор параметров моделей.

При численном решении были использованы абсолютно устойчивый метод Гира и условно устойчивый метод Рунге-Кутты. Численное решение проводилось на равномерной сетке с различной плотностью узлов. Были получены решения, соответствующие двум исходам вирусного заболевания: выздоровление и летальный исход. Изменения с течением времени поведения основных компонентов иммунного ответа представлено в виде графиков и соответствует физики рассматриваемых процессов..

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии. – М.: Наука, 1985. – 240с.
2. Математические модели заболеваний и методы обработки медицинской информации/ ред. Марчук Г. И.- Новосибирск: Наука, 1979.- 380с.

## Математические модели усиления иммунного ответа

**Султонова Ш.Х.**

**Научный руководитель: ст. преподаватель Меркулова Н.Н.**

Томский государственный университет

E-mail: [nozajon@sibmail.com](mailto:nozajon@sibmail.com)

В связи с растущим объемом экспериментальных исследований в медицине возникает необходимость использования ЭВМ и математических методов для обработки данных эксперимента. Этим и

объясняется возрастающий интерес к математическому моделированию медицинских проблем.

В данной работе рассматриваются три математические модели ( $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ) иммунного ответа организма на чужеродные антигены [1]. Модель  $M_0$  описывает нормальный иммунный ответ. Модель  $M_1$  учитывает действие стимулятора антителопродукции (САП) на «молчащие» плазматические клетки. Модель  $M_2$  рассматривает увеличение продолжительности жизни плазматических клеток за счет «молчащих».

Каждая из моделей представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными данными (задача Коши). Модель  $M_0$  состоит из трех дифференциальных уравнений первого порядка, в которую входят  $V(t)$  - концентрация антигенов,  $C(t)$  - концентрация плазматических клеток, производящих антитела,  $F(t)$  - концентрация антител. Вторая модель  $M_1$  состоит из четырех дифференциальных уравнений, где кроме  $V(t)$ ,  $C(t)$  и  $F(t)$  добавлено  $B(t)$  - «молчащие» плазматические клетки. Модель  $M_2$  отличается от модели  $M_0$  только одним параметром.

Все уравнения моделей приведены к безразмерному виду, найдены стационарные решения и исследованы на устойчивость. Вычислительный эксперимент на компьютере проведен с применением методов Эйлера и Рунге-Кутты [2]. Рассмотренные методы исследованы на сходимость и на устойчивость. Найдены ограничения на шаг интегрирования. Численные результаты оформлены в виде графиков. Показано, что характеры поведения  $V(t)$ ,  $C(t)$ ,  $F(t)$  и  $B(t)$  соответствуют физике процесса.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Математические модели в иммунологии и медицине: Сб. статей 1982-1985 гг. Пер. с англ./Сост. Г.И. Марчук, Л.Н. Белых.-М.; Мир, 1986.-310с., ил.
2. Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений: Учебное пособие.-Томск: ТМЛ-Пресс, 2007.-Ч. 2.-288с.

## Разностная схема повышенного порядка точности для уравнения параболического типа

Тажыйма С.У.

Научный руководитель: ст. преподаватель Лаева В.И.

Томский государственный университет

E-mail: [saisu88@mail.ru](mailto:saisu88@mail.ru)

Работа посвящена построению разностной схемы повышенного порядка точности по пространственным переменным для решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned}y^n &= y^{n-1} + \tau a \Lambda' y^n + \tau \varphi^n, \\ \Lambda' y^n &= \Lambda_1 y^n + \Lambda_2 y^n + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y^n, \\ \Lambda_1 y^n &= y_{\bar{x}_1}^n = \frac{y_{i+1j}^n - 2y_{ij}^n + y_{i-1j}^n}{h_1^2}, \quad \Lambda_2 y^n = y_{\bar{x}_2}^n = \frac{y_{i,j+1}^n - 2y_{ij}^n + y_{i,j-1}^n}{h_2^2}, \\ \varphi^n &= f^n + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1 f^n + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2 f^n, \\ y^n &\equiv y_{ij}^n = u(t_n, x_{1i}, x_{2j}), \quad f^n \equiv f(t_n, x_{1i}, x_{2j}), \\ y_{ij}^0 &= \psi_0(x_{1i}, x_{2j}), \quad y_{ij}^n = \mu(x_{1i}, x_{2j}, t), \quad (x_{1i}, x_{2j}) \in \Gamma, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

Данная разностная схема имеет четвертый порядок аппроксимации по пространственным переменным и первый порядок по времени.

При выполнении условия

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \sqrt{5}$$

схема однозначно разрешима по принципу максимума [1] и устойчива, и, следовательно, решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной согласно теореме Лакса.

Поставленная разностная задача была решена методом неполной редукции, являющимся комбинацией методов Фурье и редукции [2].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.

2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

## **Дескрипторы цифрового изображения и их использование для кластеризации видеосцен**

**Толмачев К.Ю.**

**Научный руководитель: доцент, к.ф.м.н. Федорова О.П.**

Томский государственный университет

E-mail: [fbarcaplayer@sibmail.com](mailto:fbarcaplayer@sibmail.com)

Описание цвета может опираться на составление его на основе основных цветов или на такие понятия, как светлота, насыщенность, цветовой тон. Известны такие цветовые модели как RGB, XYZ, HSL и т.д. В данной работе используется цветовая модель RGB, в которой цветовым компонентами являются красный, зеленый и синий цвета.

Цифровое видеоизображение можно представить в виде последовательности кадров  $K_t, t = \overline{1, n}$ . Где каждый пиксель цифрового изображения можно интерпретировать как тройку случайных величин RGB [1]. В этом случае кадр-это выборка этих случайных величин [2].

В настоящей работе в качестве дескрипторов цифрового изображения были использованы гистограммы и семиинварианты. Показано что с помощью семиинвариантов можно разделить видеоизображение на сцены [1]. Применение семиинвариантов позволяет существенно уменьшить размерность пространства признаков, а как следствие снизить требуемый объем памяти для сохранения индексов цифрового изображения и увеличить скорость поиска требуемой сцены. Для решения задачи кластеризации видеосцен применены методы K-means и Forel [3]. В качестве среды разработки был выбран язык программирования высокого уровня MatLab.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB / Гонсалес Р., Вудс Р., Эддинс С. - М.: Техносфера, 2006. – 616с.
2. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов. / Фукунага К. – М.: Наука, 1979. – 368с.

3. Загоруйко Н.Г. Методы распознавания и их применение. – М.: Наука, 1972. – 208с.

## Математическое моделирование поискового поведения хищника

**Федотова Е. Е.**

**Научный руководитель: ст. преп. Михайлов М. Д.**

Томский государственный университет

E-mail: [feya.ee@mail.ru](mailto:feya.ee@mail.ru)

Рассматривается пространственная модель динамики популяции «хищник – жертва» [1] вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial t} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - g(N)P + \delta_N \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial P}{\partial t} = eg(N)P - mP - \frac{\partial(PV)}{\partial x} + \delta_P \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial V}{\partial t} = k \frac{\partial N}{\partial x} + \delta_V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}; \end{cases} \quad (1)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{cases} N(x,0) = N_0, P(x,0) = P_0, V(x,0) = V_0; \\ V|_{x=0,L} = \frac{\partial N}{\partial x}|_{x=0,L} = \frac{\partial P}{\partial x}|_{x=0,L} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

с тремя трофическими функциями:

1)  $g(N) = aN$  - простейшая линейная зависимость Лотки – Вольтерры, которая не учитывает насыщения рациона хищника при увеличении плотности популяции жертв [1].

2)  $g(N) = \frac{aN}{1 + ahN}$  - трофическая функция Холлинга [2].

3)  $g(N) = R(1 - e^{-sN})$  - трофическая функция Ивлева [2].

При малых значениях плотности популяции жертв  $g(N)$  Ивлева эквивалентна функции Холлинга, и обе зависимости насыщаются с ростом плотности популяции жертв.

Использовались явная и неявная разностные схемы [3] для численного решения задачи (1) – (2). Рассмотрены вопросы устойчивости, аппроксимации и сходимости приведенных разностных схем.

Численная реализация проводилась на языке высокого уровня с использованием ПЭВМ. По результатам численных расчетов были построены графики в среде Excel и дан их анализ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Федотова Е. Е., Михайлов М. Д. Математическое моделирование поискового поведения хищника //Современные проблемы математики и механики: Материалы Всерос. молод. науч. конф. (Томск, 13-15 октября 2010). Томск: Изд – во Том. Ун – та, 2010. С. 221 – 223.
2. Тютюнов Ю. В., Сапухина Н. Ю., Сенина И. Н., Ардити Р. Явная модель поискового поведения хищника //Журнал общей биологии. 2002, т.63.№2. С.137 – 148.
3. Меркулова Н. Н., Михайлов М. Д. Методы приближенных вычислений: Учеб. пособие. - Томск: ТГУ, 2007. – 287с.

## **Численное решение нестационарных конвективно-диффузионных уравнений на адаптивных сетках с использованием графических процессоров**

**Юнышев А.А.**

**Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор А.В. Старченко,**  
Томский государственный университет  
E-mail: [nemio.art@gmail.com](mailto:nemio.art@gmail.com)

Одной из центральных проблем математического моделирования является численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Одним из последних веяний в современной компьютерной индустрии является использование вычислительной мощности видеокарт для ускорения расчетов. Корпорация Nvidia разработала специальный пользовательский интерфейс для осуществления таких расчетов на своих графических чипах на языках C и C++. Целью работы является нахождение приближенного решения нестационарного конвективно-диффузионного уравнения на адаптивных сетках с использованием графических процессоров.

Постановка: Пусть требуется решить дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < L$$

В замкнутой двумерной области с границей, состоящей из отрезков, параллельных координатным осям с начальными условиями

$$t = 0 : T = T_b;$$

граничными условиями второго рода

$$x = 0 : \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad x = L_x : \frac{\partial T}{\partial x} = 0;$$

$$y = 0 : \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad y = L_y : \frac{\partial T}{\partial y} = 0;$$

где  $u, v$  - константы.

Для численного решения задачи используется последовательность вложенных сеток для уточнения решения в некоторой подобласти; конечно-разностные аппроксимации второго порядка для дифференциальных операторов; явная или неявная разностная схема с итерационным методом решения сеточных уравнений (метод сопряженных градиентов).

При распараллеливании вышеупомянутых методов использовалась технология CUDA с двумерной декомпозицией сеточной области с перекрытием.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Волков Е. А. Численные методы: Учеб. пособие для вузов.—2-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 248 с.
2. Yousef Saad // Iterative Methods for Sparse Linear Systems//, SECOND EDITION WITH CORRECTION S. JANUARY 3RD, 2000.
3. Самарский А.А., Николаев Е.С. Метод переменных направлений//Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. С.432-459
4. NVIDIA CUDA Programming Guide2.3 – <http://www.nvidia.ru>

# СЕКЦИЯ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

## Оценка основных параметров страховой деятельности для страхования имущества

Оценка основных параметров страховой деятельности для страхования имущества

**Афони́на Ю.М.**

**Научный руководитель: ст. преподаватель, Емельянова Т.В.**

Томский Государственный университет

E-mail: [y282@sibmail.com](mailto:y282@sibmail.com)

Страхование- одна из древнейших категорий общественных отношений.

Виды страхования можно поделить на долгосрочные и краткосрочные (рисковые). К краткосрочным видам страхования относятся страхование имущества, медицинское, и т. д.

Термин разорение возник исторически. Более точно было бы назвать его например, ”дефицитом”.

Одним из критериев оптимальности функционирования страховой компании является распределение страховых выплат за рассматриваемый промежуток времени.

Подбор распределения страховых выплат осуществлялся с помощью критерия хи-квадрат. Проверялась гипотеза

$$H_0 : F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases} \quad \text{против} \quad \text{гипотезы}$$

$$H_1 : F(x) \neq \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$$

Для оценки вероятности разорения страховой компании воспользуемся моделью Крамера- Лундберга, которая имеет следующий вид

$$Y_t = Y_0 + ct - \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k$$



**Теорема:** (Крамера- Лундберга).

Пусть  $\exists R > 0$ , что выполнено условие

$$\int_0^{\infty} e^{Rx} (1 - F(x)) dx = \frac{c}{\lambda}.$$

Тогда

$$P(\tau < \infty) \leq e^{-Ru},$$

где  $u$ - начальный капитал.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики / А. Н. Ширяев. – М.: ФАЗИС, 1998. – Т. 1. – 512 с.
2. Королев В. Ю., Бенинг В. Е., Шоргин С. Я. Математические основы теории риска: Учебн. пособ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 544 с.

## **Исследование социального положения детей и подростков, оставшихся без попечения родителей**

Исследование социального положения детей и подростков, оставшихся без попечения родителей

**Груне К.А.**

**Научный руководитель: доцент, к.ф.– м.н. Кривякова Э.Н.**

Томский государственный университет

E-mail:Kukolka526@mail.ru

Работа посвящена исследованию методами математической статистики вопросов социального характера. Используются данные за период с 1995 по 2008 год по численности детей, оставшихся без попечения родителей в Томской области, и по численности тех из них, которые были устроены в интернатные учреждения. Посчитан коэффициент корреляции между числом детей устроенных в интернатные учреждения и теми, которые остались без надзора. Методом наименьших квадратов была исследована зависимость от времени числа детей, оставшихся без попечения родителей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б.А. Севастьянов «Курс теории вероятности и математической статистики», Москва, 2004г.
2. Д. Крамер «Математическая обработка данных в социальных науках», Москва, «Академия», 2007г.
3. Касинский С.В. «Статистический ежегодник», Томск, 2009г.

## **Задача о разорении игрока.**

### **Оптимальная стратегия игры в рулетку.**

Задача о разорении игрока. Оптимальная стратегия игры в рулетку.

**Дарханов А.В.**

**Научный руководитель: ст. преподаватель Емельянова Т.В.**  
Томский государственный университет.

Пусть игрок А выигрывает доллар с вероятностью  $p$  и проигрывает доллар с вероятностью  $q$ . Его начальный капитал равен  $z$  и он играет против игрока с начальным капиталом  $a - z$ , так что их суммарный капитал равен  $a$ . Игра продолжается до тех пор, пока капитал игрока А либо не уменьшится до нуля, либо не возрастет до  $a$ , т.е. до тех пор, пока один из двух играющих не разорится. Нас интересует вероятность разорения игрока А и распределение вероятностей времени продолжительности игры. Это классическая задача о разорении. В работе рассматривается решение этой задачи с помощью мартингалных методов [2,3] и с помощью разностных уравнений [1]. Исследуется применение этой теории к игре в рулетку. Приведены некоторые стратегии игры в рулетку (такие как “Мартингейл”, “Система Томаса-Дональда”) и выбрана оптимальная из них.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Феллер В. Введение в теорию вероятности и её приложения. Москва. 1983.
2. Ширяев А.Н. Вероятность. Москва. 1980.
3. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. Москва. 2003.

## **Статическое оценивание уровня льготного лекарственного обеспечения Томска и томской области.**

Статическое оценивание уровня льготного лекарственного обеспечения Томска и томской области.

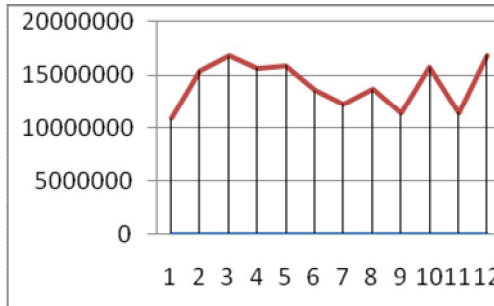
**Иванюк Ю.В.**

**Научный руководитель: ст. преподаватель Емельянова Т.В.**  
Томский государственный университет.

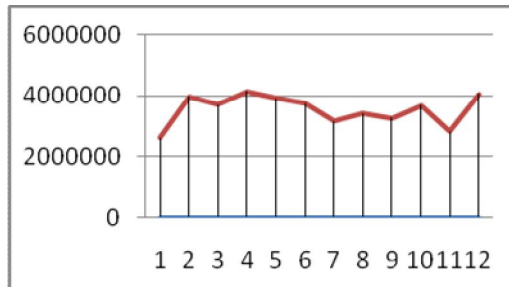
Управлением здравоохранения Томска и Томской области нам был предоставлен массив данных по льготному лекарственному обеспечению города Томска и Томской области.

Наибольший интерес представляет зависимость: месяц-сумма выплат на льготное лекарственное обеспечение.

Графически данные зависимости выглядят следующим образом для г. Томска:



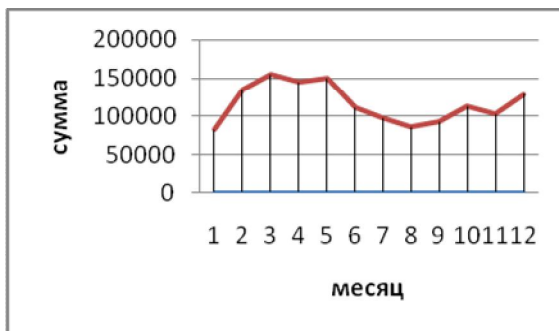
для области:



В работе была проверена гипотеза однородности с помощью критерия  $\chi^2$  - Пирсона. [1]

Получили  $\chi_{\text{выб}}^2 = 466734 > \chi_{\text{таб}}^2 = 19,675$ . Вследствие этого гипотеза однородности отвергается.

Зависимость: месяц-сумма выплат для льготников чернобыльцев имеет вид:



Подбор кривой, наилучшим образом описывающей данные, был осуществлен методом наименьших квадратов. [2,3]

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. Москва. 1984.
2. Исаева Н.А., Кривякова Э.Н. Метод наименьших квадратов. Линейная регрессия. Томск 1991.
3. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы и основы математико-статистической теории разработки наблюдений. Москва. 1962.

## Исследование семейного положения населения города Томска

Исследование семейного положения населения города Томска.

**Ильина Ю.В.**

**Научный руководитель: доцент к.ф.- м.н. Кривякова Э.Н.**

Томский государственный университет

E-mail: yliailina@mail.ru

Работа посвящена исследованию методами математической статистики вопросов социального характера, характеризующих население г. Томска.

В работе использованы данные по количеству браков и разводов с 1991-2008 гг. в г. Томске. Посчитан коэффициент корреляции между числом браков и разводов, он равен 0,9 и получено, что свидетельствует о существенной зависимости между числом браков и разводов. Методом наименьших квадратов получены также кривые зависимости от времени количества браков и количества разводов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б.А. Севастьянов «Курс теории вероятности и математической статистики», Москва, 2004г.
2. Д. Крамер «Математическая обработка данных в социальных науках», Москва, «Академия», 2007г.
3. Касинский С.В. «Статистический ежегодник», Томск, 2009г.

## Оптимальная интерполяция поля вывала в районе Тунгусского явления

Оптимальная интерполяция поля вывала в районе Тунгусского явления

**Карпова Т.В.**

**Научный руководитель: к.ф.-м.н. Кривякова Э.Н.**

Томский государственный университет

E-mail: [tanchik @danet.com](mailto:tanchik@danet.com)

В районе Тунгусского явления имеется мощный вывал на площади более чем в 2150 км. кв.

Вывал леса задает на плоскости поле азимутов (направлений) повала деревьев, характеризующее направление движения ударной волны. [1] Рассматривается поле направлений  $\bar{A}$ , полученное усреднением азимутов повала на площади фиксированного размера (0,25 га).

Из материалов о вывале значения  $\bar{A}$  известны лишь в точках, образующих нерегулярную сеть на плоскости. Для получения значений этого поля в регулярной сети точек и построения изолиний поля  $\bar{A}$  необходима его интерполяция (расчет значений поля в точках области, где они не определялись экспериментально). Случайное поле предполагается однородным и изотропным. [2] В рассматриваемом случае интерполяционное значение можно получить в произвольной точке области методом оптимальной интерполяции [3], предложенным Л.С. Гандиным в 1963 г.

Работа проводится по дополненному в 1983г. каталогу, содержащему данные по 1409 площадям.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Фаст В.Г. Статистический анализ параметров Тунгусского вывала // Проблема Тунгусского метеорита. – 1967. – Вып.2. – С.40 - 61
2. Фаст В.Г., Баранник А.П., Разин С.А. О поле направлений повала деревьев в районе падения Тунгусского метеорита/ Проблема метеоритики. – Томск: Изд-во ТГУ, 1976. – С.39 - 52.
3. Гандин Л.С. Объективный анализ метеорологических полей// Оптимальная интерполяция. – 1963. – С.73 – 116.

## **Системы одновременных уравнений**

Системы одновременных уравнений

**Лунышина И.В.**

**Научный руководитель: к.ф.-м.н. Кривякова Э.Н.**

Томский государственный университет

Е-mail: [innochkal@sibmail.com](mailto:innochkal@sibmail.com)

Эконометрическая модель, выраженная системой одновременных уравнений (СОУ), служит для объяснения поведения эндогенных (т.е. формирующихся в процессе и внутри функционирования описываемой социально-экономической системы) переменных в зависимости от значения экзогенных (задаваемых извне) и лаговых переменных. [1] В последние десятилетия в экономических, биометрических и социологических исследованиях важное место заняла проблема описания структуры связей между переменными системы уравнений регрессии, называемых также структурными уравнениями. СОУ широко используются в проведении многовариантных сценарных расчетов, касающихся социально-экономического развития анализируемой системы, а также в задачах прогноза экономических и социально-экономических показателей.

В данной работе исследована система одновременных уравнений для составления модели, характеризующей общую экономическую ситуацию в регионе.[2] Для описания этой модели мною были изучены следующие вопросы:

1. основные структурные характеристики модели;
2. индентифицируемость уравнений системы, т.е. изучение существования и единственности решения системы;
3. статистическое оценивание параметров СОУ (двухшаговый метод наименьших квадратов);

4. точечный и интервальный прогноз значений эндогенных переменных. [3]

Составлена отладочная программа вычисления коэффициентов системы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика. Основы эконометрики \_ ч.1 Теория вероятностей и прикладная статистика. – М. : Изд-во ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 656 с.
2. Елисеева И.И. Эконометрика, теория, практика. – М. : Изд-во Финансы и статистика, 2005. – 574 с.
3. Айвазян С.А. Прикладная статистика. Основы эконометрики \_ ч.2 Основы эконометрики//Системы линейных одновременных уравнений. – М. : Изд-во ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 432 с.

### **Системы одновременных уравнений.**

#### **Модель мультипликатора-акселератора.**

Системы одновременных уравнений. Модель мультипликатора-акселератора.

**Мурзина Е.А.**

**Научный руководитель: к.ф.-м.н. Кривякова Э.Н.**

Томский государственный университет

При моделировании сложных экономических процессов широко используются *системы одновременных уравнений* – системы уравнений и тождеств, в которых одни и те же переменные одновременно рассматриваются как зависимые в одних уравнениях и как независимые в других.

В настоящей работе рассматривается модель мультипликатора-акселератора, описывающая механизм самоподдерживающихся экономических колебаний развития, представленная системой одновременных уравнений:

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11} * R_t + b_{12} * C_{t-1} + \delta_1 \\ I_t = a_2 + b_{21} * (R_t - R_{t-1}) + \delta_2 \\ R_t = C_t + I_t \end{cases}, t = \overline{1, n},$$

где  $C$  - расход на потребление,  $R$  - доход,  $I$  - инвестиции.

Для модели мультипликатора- акселератора решается проблема идентифицируемости, вследствие чего устанавливается, что модель точно идентифицируемая и оценивание параметров системы возможно с помощью косвенного метода наименьших квадратов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Айвазян С.А. Прикладная статистика. Основы эконометрики ч.2. Основы эконометрики//Системы одновременных линейных уравнений. М.: Изд-во ЮНИТИ-ДАНА, 2001, 432 с.
2. Елесева И.И. Эконометрика. М.: Изд-во Финансы и статистика, 2005, 574 с.
3. Фишер Ф. Проблема идентификации в эконометрии. М.: Изд-во Статистика, 1978, 221с.

### **Задача оптимального потребления и инвестирования для модели Блэка-Шоулса**

Задача оптимального потребления и инвестирования для модели Блэка-Шоулса

**Смирнов А.Е.**

**Научный руководитель: профессор,**

**д.ф.м.н. Пергаменщиков С.М.**

E-mail: [MagnusWest@mail.ru](mailto:MagnusWest@mail.ru)

В работе исследуется задача оптимального потребления и инвестирования для инвестора, который оперирует на финансовом рынке Блэка-Шоулса со стохастическими коэффициентами, зависящими от негауссовского процесса Орнштейна-Уленбека:

$$\begin{cases} \frac{dB(t)}{B(t)} = r(Y(t))dt, B(0) = 1 \\ \frac{dS(t)}{S(t)} = \mu(Y(t))dt + \sigma(Y(t))dW(t), S(0) = s > 0. \end{cases}$$

Предполагается, что инвестор принимает свои решения, основываясь на функции полезности:



$$\sup_{c, \pi} E \left[ \int_0^T (c(s))^y ds + (X^{c, \pi}(T))^y \mid X(0) = x, Y(0) = y \right].$$

Задача сводится к решению нелинейного уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана в частных производных второго порядка. Решение находится при помощи представления Фейнмана-Каца. Используя свойства дифференциального оператора, доказываем единственность и гладкость решения. Оптимальность проверяется посредством теоремы о версификации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Липцер Р. Ш. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы)/ Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. - М.:Наука, 1974. - 696 с.
2. Липцер Р. Ш. Теория мартингалов/ Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. - М.: Наука, 1986. - 512 с.
3. Ширяев А. Н. Основы финансовой математики/ А. Н. Ширяев. - М.: Фазис, 1998. - 512 с.
4. Delong L., Kluppelberg C. Optimal investment and consumption in a Black-Scholes market with stochastic coefficients driven by a non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck process.
5. Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов европейского и американского типов. II. Непрерывное время / Теория вероятностей и ее применения. 1984. Т. 39. Вып. 1.

## **Оптимальное резервирование по критерию среднего времени безотказной работы**

Оптимальное резервирование по критерию среднего времени безотказной работы

**Травкина В.В.**

**Научный руководитель: профессор, д.ф.м.н. Пестов Г.Г.**

Томский государственный университет

E-mail: [t\\_viola@mail.ru](mailto:t_viola@mail.ru)

В настоящее время резервирование как один из способов повышения надежности систем применяется весьма часто. Особенно важно резервировать системы, от которых требуется наиболее длительное функционирование.

В данной работе рассматривается задача: пусть система состоит из конечного числа параллельно включенных (в смысле надежности) идентичных элементов. К моменту начала работы системы имеется  $r$  исправных элементов. Через фиксированный промежуток времени  $\Delta$  в моменты  $t = 0, \Delta, 2\Delta, \dots$  производится проверка исправности включенных в работу элементов. Выход из строя элемента, включенного в работу, не влияет на исправность других элементов. Часть элементов находится в холодном резерве (в холодном резерве элементы не выходят из строя). Обозначим через  $q$  вероятность отказа элемента на интервале длиной  $\Delta$ ,  $p=1-q$ ; через  $k(r)$  - целочисленную функцию, означающую то количество исправных элементов, которое должно быть включено в работу после каждой проверки при наличии  $r$  исправных элементов. Ищем стратегию резервирования, оптимальную по критерию среднего времени безотказной работы системы. Пусть  $k_0(r)$  - оптимальное значение  $k(r)$ ,  $T(r)$  - среднее время безотказной работы системы при оптимальной стратегии; наконец,  $T(r, k)$  - среднее время безотказной работы системы, соответствующее стратегии: в начальный момент в работу включается  $k$  элементов, в последующие моменты используется оптимальная стратегия. Имеем

$$T(r, k) = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i p^{k-i} q^i (T(r-i) + 1) \cdot$$

Описанная модель называется системой с управляемым резервом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пестов Г.Г., Ушакова Л.В. Исследование оптимальных стратегии в задаче динамического резервирования. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1973, №5.

## **Выделение тренда временного ряда при случайном числе данных в моменты измерений**

Выделение тренда временного ряда при случайном числе данных в моменты измерений

**Фролова А.В.**

**Научный руководитель: доцент, к.т.н. Устинова И.Г.**

Томский государственный университет

E-mail: [sanushafro@sibmail.com](mailto:sanushafro@sibmail.com)

Анализ временных рядов, в том числе и выделение тренда временного ряда, является одной из наиболее важных областей изучения в экономической теории и практике [1].

Предположим, что временной ряд  $y_i$ , генерируемый некоторой моделью, можно представить в виде:

$$y_i = f_i(t) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $f_i(t)$  - тренд временного ряда, а величина  $\varepsilon_i$  случайная составляющая временного ряда.

В исследовательской работе изучен параметрический способ выделения тренда [2]. В качестве прогнозирующей модели выбран МНК, на основе которого оцениваются параметры функции  $f_i(t)$ .

Тренд временного ряда выделяется с помощью сплайна первого порядка, когда в каждый момент времени проводится случайное число измерений. Оценки коэффициентов сплайна первого порядка строятся рекуррентно МНК, что позволяет выделить тренд в реальном масштабе времени по мере поступления соответствующей информации, и находятся из условий:

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{t=(i-1)T_0+1}^{iT_0} n_t \left[ a_{i-1} \left( i - \frac{t}{T_0} \right) + a_i \left( 1 - i + \frac{t}{T_0} \right) - y_t \right]^2 \rightarrow \min_{a_i},$$

где  $n_t$  - случайная величина, распределенная по закону Пуассона с постоянной интенсивностью  $\lambda$ .

Поставленная задача решалась на основе анализа данных АО "Газпром" за январь-март 2011г. Используя построенную модель, получены несмещенные, эффективные оценки, позволяющие выделить тренд временного ряда, когда в каждый момент времени происходит случайное число сделок.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лукашин Ю. П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. – М.: Финансы и статистика, 2003.
2. Бокс Д., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. – М.: Мир, 1974

## Экзотические однобарьерные опционы

Экзотические однобарьерные опционы

Шелехова М.А.

Научный руководитель: профессор,

д.ф.м.н. Пергаменщиков С.М.

E-mail: [Marishkaangel@mail.ru](mailto:Marishkaangel@mail.ru)

Барьерные опционы - это опционы, выплаты по которым зависят от того, достигла ли цена финансового актива за время существования опциона определенного ценового уровня или нет. Соответствующий ценовой уровень может рассматриваться как барьер, который либо «включает» опцион, либо «выключает».

Целью данной работы является вычисление рациональной цены однобарьерных опционов европейского типа на финансовых рынках типа Блэка-Шоулса.

Рассмотрим стохастический базис  $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P)$ . Финансовый рынок состоит из двух инструментов:

$$\begin{cases} B_t = 1 \\ dS_t = S_t(rdt + \sigma dB_t) \end{cases}, t \geq 0.$$

Используя теорему Гирсанова и теорему о представлении квадратично интегрируемых мартингалов, получили цену ДОС опциона:

$$DOC(S_0, K, L) = E_Q(e^{-eT} (S_T - K)_+ \chi_{\{T_L > T\}}).$$

Данная формула вызывает затруднения при моделировании. Поэтому центральным моментом в работе является преобразование цены опциона к виду, пригодному для вычислений.

Также находятся цены других однобарьерных опционов: ДИС, УОС.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Липцер Р. Ш. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы)/ Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. - М.:Наука, 1974. - 696 с.
2. Ширяев А. Н. Основы финансовой математики/ А. Н. Ширяев. - М.: Фазис, 1998. - 512 с.
3. Karoui N., Jeanblanc M. Options exotiques. 2000.
4. Dana R. Financial markets in continuous time/ R. Dana, M. Jeanblanc. – Paris: Economica, 2003. – 326 p.

5. Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов европейского и американского типов. II. Непрерывное время / Теория вероятностей и ее применения. 1984. Т. 39. Вып. 1.

## СЕКЦИЯ «ТОПОЛОГИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

### Дополняемые подпространства в пространстве $Cp(x)$

Дополняемые подпространства в пространстве  $Cp(x)$

Демидова И.Ю.

Научный руководитель: профессор, д. ф. м. н. Гулько С.П.

Томский государственный университет

E-mail: [mira005@sibmail.com](mailto:mira005@sibmail.com)

Данное исследование основано на работе А. Пелчинского [1].  
Здесь рассматривается структура дополняемых подпространств  
бесконечномерных тихоновских пространств  $Cp(x)$ .

**Определение:** Закрытое векторное подпространство  $Y$  пространства  $Cp(x)$  называется дополняемым, если существует другое закрытое векторное подпространство  $Y_1$  (дополнение) такое, что  $Cp(x) = Y \oplus Y_1$ .

В частности доказаны теоремы:

**Теорема1:** Для любого бесконечномерного закрытого векторного подпространства  $L \subset c_0$  существует подпространство  $M \subset L$  такое, что

- 1)  $M$  дополняемо в  $c_0$ ;
- 2)  $M$  изоморфно  $c_0$ .

**Теорема2:** Любое бесконечномерное подпространство  $N \subset s$  изоморфно  $s$  и дополняемо в  $s$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. Pelczynski, Projections in certain Banach spaces, *Studia Math.* 19 (1960), p. 209-228.
2. S. Mazur and W. Orlics, On linear methods of summability, *Studia Math.* 14 (1954), p. 129-160.

## Пространство функций 1-го класса Бэра

Пространство функций 1-го класса Бэра

**Жанугулова В.А.**

**Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Хмылева Т.Е.**

Томский государственный университет

E-mail: [mis.varajan@ya.ru](mailto:mis.varajan@ya.ru)

Классы Бэра – множества функций, определяемые согласно классификации, введенной французским математиком Рене-Луи Бэром в 1899 г.

В частности функции 1-го класса Бэра – это функции поточечно-го предела последовательности непрерывных функций. Известно, что для функций определенных на отрезке  $[a,b]$ , это определение равносильно определению, что прообраз открытого множества -  $F_\sigma$ . В Кечересе показано: эти два определения равны при условии, что  $f: X \rightarrow Y$ , где оба пространства метрические и сепарабельные,  $X$  - нульмерное или  $Y = \mathbb{R}$ . В остальных случаях эти определения разные. В работе же рассматриваются функции 1-го класса Бэра на прямой, со значениями в поле целых и рациональных чисел с топологией поточечной сходимости. Если определить функции 1-го класса как предел последовательности непрерывных функций, то это пространство совпадет с классом постоянных функций. Так же функции 1-го класса Бэра из  $\mathbb{R}$  в  $\{0,1\}$  и в  $\{0,1,2\}$ , установлено – эти два класса функций не являются гомеоморфными, так как  $\{0,1\}$  и  $\{0,1,2\}$  линейно не изоморфны по сложению.

### ЛИТЕРАТУРА

1. К.Куратовский, «Топология», 1 том.
2. Alexander S.Kechris, “Classical Descriptive Set Theory”

## Об одном свойстве пространства $l_1$

Об одном свойстве пространства  $l_1$

**Каргин Д.И.**

**Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. Гулько С.П.**

Томский государственный университет

E-mail: [kd481@mail.ru](mailto:kd481@mail.ru)

В данной работе дано подробное описание семейства компактных хаусдорфовых топологий на множестве натуральных чисел, приведенное в [1]. Также доказано, что множества натуральных чисел, снабженные топологиями, представляющими различные элементы указанного семейства, не гомеоморфны. С использованием этих утверждений доказана теорема о том, что пространство  $l_1$  имеет множество преддвойственности не являющихся изометрически изоморфными.

### ЛИТЕРАТУРА

1. S.Rossi, On a class of  $C^*$ -preduals of  $l_1$

## Двойственность Понтрягина-ван Кампена для свободных $n$ -периодических топологических групп

Двойственность Понтрягина-ван Кампена для свободных  $n$ -периодических топологических групп

**Овчинникова Ю.С.**

**Научный руководитель: Гензе Л.В.**

Томский государственный университет

**Определение 1.** ([1]) Пусть  $X$  – тихоновское пространство и  $n \geq 2$  – фиксированное натуральное число. *Свободной абелевой  $n$ -периодической топологической группой  $A^{[n]}(X)$*  называется топологическая группа, обладающая следующими свойствами:

$X$  гомеоморфно замкнутому подпространству в  $A^{[n]}(X)$ ;

алгебраически  $A^{[n]}(X)$  является прямой суммой семейства групп  $\{Z_n^x : x \in X\}$ , где  $Z_n^x$  изоморфна  $Z_n$  для каждого  $x \in X$ ;



Если  $G$  произвольная абелева  $n$ -периодическая топологическая группа (т.е.  $ng = 0$  для каждого  $g$  из  $G$ ) и  $f: X \rightarrow G$  – непрерывное отображение, то  $f$  можно продолжить до непрерывного гомоморфизма  $\bar{f}: A^{[n]}(X) \rightarrow G$ .

**Определение 2.** Пусть  $G$  – топологическая группа. Каждый гомоморфизм группы  $G$  в группу  $\mathbb{S}^1$  называется *характером* группы  $G$ . Множество всех непрерывных характеров группы  $G$ , снабженное компактно-открытой топологией, образует топологическую группу и обозначается  $G^\wedge$ .

Известно ([2], [3]), что для нульмерных компактов  $X$  имеет место изоморфизм  $A(X) \cong A(X)^{\wedge\wedge}$ , где  $A(X)$  – свободная абелева топологическая группа.

Получены следующие результаты:

Если  $X$  – нульмерный компакт, то

Первая группа характеров  $A^{[n]}(X)^\wedge$  дискретна и изоморфна пространству  $C(X, \mathbb{Z}_n)$ .

Вторая группа характеров  $A^{[n]}(X)^{\wedge\wedge}$  компактна.

Естественный гомоморфизм  $\omega: A^{[n]}(X) \rightarrow A^{[n]}(X)^{\wedge\wedge}$  является непрерывной инъекцией.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гензе Л.В. Свободные  $n$ -периодические топологические группы // Вест. Томского ун-та. Математика и механика. 2010. №3(11). С. 23-28.
2. Pestov V.G. Free Abelian topological groups and the Pontryagin-van Kampen duality // Bull. Austral. Math. Soc. 52(1995), P. 297-311.
3. Galindo J., Hernandez S. Pontryagin-van Kampen reflexivity for free Abelian groups // Forum Math. 11 (1999), P. 399-415.

# Метризуемые подпространства в свободных абелевых топологических $n$ -периодических группах

Паньковская Е.А.

Научный руководитель: Гензе Л.В.

Томский государственный университет

E-mail: [askes\\_liza@mail.ru](mailto:askes_liza@mail.ru)

Свободной абелевой группой, порожденной множеством  $X$ , называется совокупность всех формальных линейных комбинаций (слов) вида  $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_kx_k$ , где все  $x_i$  из  $X$  и попарно различны, а  $\alpha_i$  - целые числа. Сумма  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$  называется длиной слова.

Свободной абелевой топологической группой называется свободная абелева группа  $A(X)$ , с такой групповой топологией, что пространство  $X$  гомеоморфно вкладывается в  $A(X)$  и для любого непрерывного отображения  $f$  пространства  $X$  в произвольную абелеву топологическую группу  $G$  существует непрерывный гомоморфизм  $h: A(X) \rightarrow G$ , для которого  $f = h|X$ .

Если в определении свободной абелевой топологической группы везде заменить слово «абелева» на «абелева  $n$ -периодическая» (т.е.  $nx=0$  для каждого  $x$ ), то получим определение свободной абелевой  $n$ -периодической топологической группы ([2]).

В [1] были представлены необходимые и достаточные условия метризуемости подмножеств  $A_k(X)$ , состоящих из всех слов длины не больше  $n$  свободной абелевой топологической группы  $A(X)$  для метризуемых пространств  $X$ . В данной работе были рассмотрены свободные абелевы  $n$ -периодические группы и получены следующие результаты:

- если  $X$  – метризуемый компакт, то все  $A_k^{[n]}(X)$  метризуемы;
- дано явное описание топологии на  $A^{[n]}(X)$  и  $A_k^{[n]}(X)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Yamada K. Metrizable Subspaces of free topological groups on metrizable spaces. Preprint.
2. Гензе Л.В. Свободные  $n$ -периодические топологические группы. Вестник ТГУ. Математика и Механика. 2010. №3(11). С.23-28.

## Некоторые свойства выпуклых множеств

Некоторые свойства выпуклых множеств

Полухина А.В.

Научный руководитель: доцент, к.ф.м.н. Хмылева Т.Е.

Томский государственный университет

E-mail: [spongik@sibmail.com](mailto:spongik@sibmail.com)

Понятие выпуклости появилось в античной древности. Еще Архимед говорил: «Выпуклыми в одну и ту же сторону я называю такие поверхности, для которых прямые, соединяющие две произвольные точки, будут находиться по одну сторону от поверхности» ( Архимед. Сочинения. М. : Физматгиз, 1962. с. 639). Основные понятия выпуклой геометрии сыграли важную роль в создании в начале 20-го века функционального анализа.

Цель данной работы заключается в исследовании свойств выпуклых множеств, в частности в исследовании свойств множества крайних точек.

В ходе исследований доказаны следующие свойства.

1. Множество крайних точек выпуклого компакта  $K \subset \square^2$  - есть замкнутое множество.

Для компакта  $K \subset \square^3$  это утверждение неверно. Приведен пример компакта, для которого множество крайних точек не является замкнутым.

2. Выпуклое замкнутое множество в нормированном пространстве, содержащее в качестве подмножества прямую, не содержит крайних точек.

3. По теореме Крейна-Мильмана, выпуклый компакт в нормированном пространстве совпадает с выпуклой оболочкой его крайних точек. В частности, единичный шар в конечномерном пространстве является выпуклой оболочкой своих крайних точек. В бесконечномерном пространстве это утверждение неверно. В работе рассматриваются множества крайних точек единичного шара в пространствах:

$$c_0, c, l_1, l_2, C[a, b], L_1(a, b).$$

Для неограниченных замкнутых множеств теорема Крейна-Мильмана неверна даже в конечномерных пространствах. Приведе-

ны примеры множеств в  $\square^2$  являющихся и не являющихся выпуклой оболочкой своих крайних точек.

4. Не существует выпуклых неограниченных множеств конечной положительной меры.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Изд-во ФМЛ, 2004, 416 с.
2. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Изд-во Наука, 1985, 335 с.

## Банахово пространство, содержащее $l_1$

Банахово пространство, содержащее  $l_1$

**Строчкова Т. А.**

**Научный руководитель: доцент, к.ф. - м.н. Хмылева Т. Е.**

Томский государственный университет

E-mail: night\_sea@mail.ru

В данной работе рассматривается теорема Розенталя об изоморфном вложении пространства  $l_1$  в произвольное банахово пространство. Доказательство Розенталя было упрощено в статье [3] с помощью следующей теоремы бесконечной комбинаторики, использующей множества типа Рамсея.

*Теорема (Nash - Williams, Galvin – Prikry)[1]:* Пусть  $M$  замкнутое подпространство из  $\square^\square$ . Тогда существует бесконечная последовательность из  $\square$ , такая что любая ее бесконечная подпоследовательность содержится либо в  $M$ , либо в  $\square^\square \setminus M$ .

*Определение:* Последовательность  $(x_n)$  в банаховом пространстве  $X$  называется слабо Коши последовательностью, если вещественная последовательность  $(x^*(x_n))$  сходится для любого  $x^* \in X^*$ .

*Теорема (Rosenthal)[2]:* Пусть  $(x_n)_{n < \omega}$  ограниченная последовательность в банаховом пространстве  $X$ . Тогда либо  $(x_n)_{n < \omega}$  имеет слабо Коши подпоследовательность, либо  $(x_n)_{n < \omega}$  имеет подпоследо-

вательность, эквивалентную единичному базису в  $l_1$  (и, следовательно,  $l_1$  изоморфно вкладывается в  $X$ ).

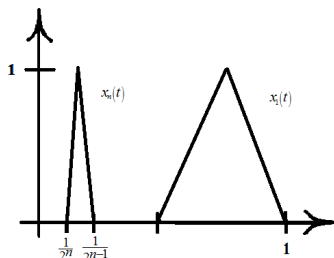


Рис 1

Пример 1: Пусть  $(x_n) \in C[0,1]$  последовательность кусочно- линейных функций (см. рис 1.). Она является слабой Коши последовательностью. По теореме Розенталя из нее нельзя извлечь подпоследовательность эквивалентную единичному базису в  $l_1$ .

Пример 2: Рассмотрим в Канторовом множестве булево-независимую систему множеств  $(A_i)$ , т.е. для любых

$F, G \subset \mathbb{N}, F \cap G = \emptyset$  выполнено следующее  $\bigcap_{i \in F} A_i \cap \bigcap_{i \in G} A_i^c \neq \emptyset$ . Заве-

дем функции,  $\chi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_i \\ -1, & x \in A_i^c \end{cases}$ . Замкнутая линейная оболочка

этих функций в  $C(E)$  изометрична  $l_1$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. F. Galvin and K. Prikrý, Borel sets and Ramsey's theorem, J. Symbolic Logic 38 (1973)
2. Chapter 23 Haskell P. Rosenthal, A characterization of Banach spaces containing  $l_1$ , Proc. Nat. Acad. Sci USA 6(1974)
3. S. Negrepontis, Banach spaces and topology, Hand Book of Set Theoretical topology (1984).

## Различные виды независимостей в банаховых пространствах

Различные виды независимостей в банаховых пространствах

Сухачева Е.С.

Научный руководитель доцент ф. - м. н. Хмылева Т.Е.

Томский государственный университет

E-mail: [Sirius9113@mail.ru](mailto:Sirius9113@mail.ru)

В данной работе рассматривается вопрос о разных типах независимости последовательностей элементов в банаховых пространствах. Используя доказательство [1] доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть  $\{x_n\}$  бесконечная линейно независимая последовательность единичных векторов в банаховом пространстве. Тогда существует  $\omega$  – независимая подпоследовательность  $\{x_{n_i}\}$ .

Определение. Бесконечная последовательность  $\{x_n\}$  единичных векторов в нормированном линейном пространстве называется  $\omega$  –

независимой, если  $\sum_{i=1}^{\infty} c_n x_n = 0 \Rightarrow c_n = 0$ .

В работе рассмотрены различные примеры  $\omega$  – независимых и  $\omega$  – зависимых последовательностей. На примере следующей последовательности продемонстрирован метод доказательства теоремы.

$x_n = (0, \dots, 0, 1, 1/2^n, 0, \dots)$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. P. Erdosh, E. G. Straus, on linear independence of sequences in a banach space.

# Пространства непрерывных функций на стрелке Зоргенфрея

Трофименко Н.Н.

Научный руководитель: доцент, к.ф.м.н. Хмылева Т.Е.

Томский государственный университет

E-mail: [Trofimenko@sibmail.com](mailto:Trofimenko@sibmail.com)

Впервые прямая Зоргенфрея, также называемая стрелкой, встречается в книге «Мемуар о компактных топологических пространствах» П.С. Урысона и П.С. Александрова в 1929 г. В 1947 г. вышла статья Зоргенфрея, в которой он представил топологическое пространство  $K$  в качестве универсального контрпримера. В дальнейшем пространство  $K$  назвали прямой Зоргенфрея. Итак, прямая, которую мы будем обозначать символом  $K$ , представляет из себя числовую прямую, базу которой образуют полуинтервалы вида  $(a, b]$ , где  $a$  и  $b$  – рациональные числа.

В данной работе рассматриваются линейные гомеоморфизмы между пространствами непрерывных функций, определенных на пространствах  $\mathcal{E}$ ,  $I$ ,  $\mathcal{E}_1$  с топологией Зоргенфрея, где  $I$  – отрезок  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{E}$  – канторово множество,  $\mathcal{E}_1$  – некоторое подмножество в  $\mathcal{E}$ .

В ходе исследований были получены следующие результаты:

**Теорема 1.** Пространство  $C_p(\mathcal{E}_1) \sim C_p(I)$ , т.е. эти пространства линейно гомеоморфны.

Доказательство следует из того, что  $\mathcal{E}_1$  гомеоморфно  $I$ .

**Теорема 2.** Пространство  $C_p(\mathcal{E}) \sim C_p(I)$ .

Доказательство основано на следующем известном факте:  $X \sim Y$ , если  $X$  дополняемо вкладывается в  $Y$ ,  $Y$  дополняемо вкладывается в  $X$  и  $X \sim (X \times X)$ , и  $Y \sim (Y \times Y)$ .

В работе В.Г. Пестова [1] показано, что пространства  $C_p(I)$  и  $C_p(I \times I)$  не являются линейно гомеоморфными, так как  $I$  и  $I \times I$  в естественной топологии имеют разные размерности. В топологии Зоргенфрея  $I$  и  $I \times I$  являются нульмерными пространствами, но по-

сколькx  $I$  – лнделефово, а  $I \times I$  – не лнделефово, то в силу теоремы Велнчко [2], нмеем следующнй результат:

**Теорема 3.** Пространство  $C_p(I) \approx C_p(I \times I)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Pestov V.G. The coincidence of the dimensions  $\dim$  of 1-equivalent topological spaces // Dokl. Akad. Nauk SSSR. № 266. С 553–556.
2. Velicho N.V. The Lindelof property is 1 – invariant // Topology and its Applications. 1998. № 89. С 277–283.

## О свойствах расстояния до пространства функций первого класса Бэра

Чимитова Д.Д.

Научный руководитель: профессор, д.ф.м.н. Гулько С.П.

Томский Государственный университет

E-mail: [Darisha89@yandex.ru](mailto:Darisha89@yandex.ru)

Рене-Луи Бэр (1874-1932 Франция). В 1899г. предложил свою классификацию разрывных функций:

- Множество всех непрерывных функций есть множество нулевого класса;

- Если функция  $f(x)$ , не входит ни в нулевой, ни в первый классы, но представима в виде  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , где каждая

функция  $f_n(x)$  непрерывна, то функция  $f(x)$  называется

функцией первого класса Бэра; и т.д.

В докладе будут обсуждаться следующие теоремы:

Теорема 1 (Хана-Тонга).

Пусть  $X$  нормальное пространство и пусть  $f_1 \leq f_2$ , такие что  $f_1$  полунепрерывна сверху, а  $f_2$  полунепрерывна снизу. Тогда существует непрерывная функция  $f \in C(X)$  такая что  $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$  для всех  $x \in X$ .



Данный результат будет использоваться для доказательства следующей теоремы.

Теорема 2.

Пусть  $X$  нормальное пространство. Если  $f \in R^x$ , то

$$d(f, C(X)) = \frac{1}{2} \text{osc}(f)$$

где  $\text{osc}(f) = \sup_{x \in X} \inf \{ \text{diam} f(U) : U \subset X \text{ открыто}, x \in U \}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. З. Семадени. Банахово пространство непрерывных функций. 1974.
2. С. Ангосто, Б. Каскалес, И. Номиока. Расстояние пространства функций первого класса Бэра. 2008.

## **СЕКЦИЯ «ФИЗИЧЕСКАЯ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА»**

### **Математическое моделирование структуры течения турбулентного закрученного потока в канале со вдувом**

Математическое моделирование структуры течения турбулентного закрученного потока в канале со вдувом

**Байгулова А.И.**

**Научный руководитель: профессор, д.ф.м.н. Матвиенко О.В.**

Томский государственный университет

E-mail: [Anastasiya\\_Baigulova@sibmail.com](mailto:Anastasiya_Baigulova@sibmail.com)

В настоящее время за рубежом и в России созданы эффективные установки с различной производительностью для приготовления битумных дисперсных систем: битумных эмульсий, модифицированных битумов, которые имеют ряд недостатков: высокую стоимость и сложное оборудование в эксплуатации

Одним из способов создания однородной битумно-дисперсной смеси может выступать закрутка потока, которая осуществляется различными способами. Влияние закрутки на структуру течения определяется параметром интенсивности закрутки, характеризующим распределение тангенциальной скорости потока. Наиболее эффективным подходом к решению задач, связанных с количественно-качественным анализом, является численное моделирование исследуемого процесса.

В настоящей работе предложены новые эффективные принципы и технологии получения модифицированных дорожных битумов способом смешения в цилиндрическом канале с боковой инъекцией модификатора

В результате расчетов получены данные о влиянии начальной скорости и величины угла закрутки на течение вязкой несжимаемой жидкости в канале с боковой инъекцией. Установлено, что в диапазоне  $\varphi < 60^\circ$  и при небольших скоростях подачи жидкости в течении не возникает зон рециркуляции. При  $\varphi > 60^\circ$  наблюдается возникновение зон возвратных течений.

Выявлено, что в канале с боковой инъекцией при слабой закрутке,  $\varphi < 60^\circ$ , изменения профиля продольной составляющей скорости наблюдаются только в приосевой зоне.

На основании приведенных выше расчетов можно сделать вывод, что наиболее оптимальным будет являться схема с одним инжектором, расположенным в непосредственной близости от завихрителя. Наибольшего эффекта можно добиться при сильной закрутки осевого потока.

## **Теоретическое и экспериментальное исследование тепловых смерчей**

Теоретическое и экспериментальное исследование тепловых смерчей

**Белоусова А.О.**

**Научный руководитель: профессор, д. т. н. Голованов А.Н.**

Томский государственный университет

E-mail: [Anita@t-sk.ru](mailto:Anita@t-sk.ru)

В огромном многообразии вихревых движений отчетливо выделяются концентрированные вихри, которые привлекают повышенный интерес. Среди природных явлений, имеющих отношение к концентрированным вихрям, несомненно, следует назвать смерчи. Смерчи — одно из удивительнейших явлений природы, до сих пор вызывающее большие споры. В настоящее время в мире ежегодно регистрируется около 1000 смерчей. Однако именно смерчи и торнадо являются самыми неизученными по причине невозможности исследования их в природных условиях. Поэтому моделирование тепловых смерчей в лабораторных условиях является актуальной задачей.

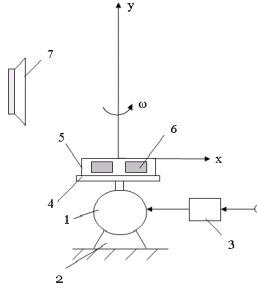


Рис.1 экспериментальная установка

Целью данной работы является физическое моделирование теплового смерча в лабораторных условиях, исследование влияния акустических колебаний на формирование и устойчивость теплового смерча, построение границы устойчивости.

Объектом исследования был созданный в лабораторных условиях тепловой смерч. Для визуализации картины течения в смерче использовались частички канифоли, находящейся на нагревательном элементе.

На рис. 1 показано устройство экспериментальной установки.

Наблюдения показывают, что закрученные потоки во многих случаях неустойчивы. Неустойчивость приводит к формированию вторичных движений, может привести к распаду вихря. Особенностью возмущений является их трехмерная структура. В результате теоретического исследования можно сделать вывод, что из рассмотренных типов временной неустойчивости, нашему случаю соответствуют короткие волны. На основе эксперимента доказано, что волны нейтрально устойчивы.

## **Математическое моделирование возникновения и распространения степных пожаров в двумерной постановке**

Математическое моделирование возникновения и распространения степных пожаров в двумерной постановке

**Вильмс В.С.**

**Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Лобода Е.Л.  
Томский государственный университет**

Степные пожары являются один из видов природных пожаров. Математическое моделирование данного природного явления является важной задачей для прогнозирования степных пожаров, что дает возможность своевременно принимать меры по борьбе с ними и предотвращать их ущерб для деятельности человека.

В докладе приводится физическая и математическая модели степного пожара в двумерной постановке, основанная на известной модели [1]. Приводятся результаты численного моделирования, профили температур, скорости распространения фронта пожара при различных скоростях ветра, сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными скорости распространения фронта степного пожара, полученными в натуральных условиях при изменяющейся скорости ветра [2].

В результате сравнения с экспериментальными данными было получено удовлетворительное согласование характерных температур внутри фронта пожара и скорости его распространения. Предложенная в данной работе математическая модель позволяет численно моделировать распространение фронта степного пожара в зависимости от характеристик слоя степных горючих материалов и погодных условий.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бурасов Д.М., Гришин А.М. Математическое моделирование низовых лесных и степных пожаров. Кемерово: Изд-во «Практика», 2006. – 133 с.
2. Гришин А.М., Фильков А.И., Лобода Е.Л., Рейно В.В., Руди Ю.А., Кузнецов В.Т., Караваев В.В. Экспериментальные исследование возникновения и распространения степного пожара в натуральных условиях. // Математическое и физическое моделирование опасных природных явлений и техногенных катастроф. Материалы Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. С. 50-51.

### **О математическом моделировании испарения воды из слоя торфа**

О математическом моделировании испарения воды из слоя торфа

**Гладкий Д.А.**

**Научный руководитель: доцент, кф.-м.н. Фильков А.И.**  
Томский государственный университет

Проблема торфяных пожаров не вызывает сомнения. Например, только в московском регионе масштабные торфяные пожары за последние 50 лет были зафиксированы в 1972, 1992, 2002 и 2010 гг. По данным МЧС, всего с начала пожароопасного периода 2010 года на территории Московской области возникло 996 очагов природных пожаров на площади 546 гектаров, из них 443 торфяных. Несмотря на негативные последствия торфяных пожаров до сих пор не разработана научно-обоснованная система прогноза возникновения этих пожаров, которая бы позволила оценить вероятность появления торфяного пожара.

Влагосодержание растительных горючих материалов (РГМ), при котором РГМ способен к воспламенению, и влагосодержание, при котором огонь способен распространяться вдоль слоя РГМ без дополнительных источников энергии, различны, кроме того, эти значения различны для различных типов РГМ. Поэтому решение задачи о сушке РГМ занимает важнейшее место в процессе прогноза пожарной опасности.

В работе рассматривается одномерная задача в декартовой системе координат. Математическая модель сушки слоя торфа является однотемпературной. Торф в процессе сушки считался многофазной средой, состоящей из сухого органического вещества, свободной и связанной воды, газовой фазы.

Численное решение данной системы уравнений осуществлялось методом контрольного объема с постоянным по времени шагом.

В результате расчетов по описанной выше модели были получены зависимости объемной доли воды, газовой фазы и температуры слоя торфа от времени. Проведено исследование влияния содержания начальных объемных долей на скорость сушки слоя торфа. Полученные численные результаты согласуются с экспериментальными данными.

Работа выполнена в рамках реализации РФФИ №11-01-00673-а и РФФИ №10-01-91054 НЦНИ-а.

## **Огненные смерчи**

Огненные смерчи

**Дроздов Я.А.**

**Научный руководитель: профессор, д.ф.м.н. Гришин А.М.**  
Томский государственный университет  
E-mail: [adimax07@mail.ru](mailto:adimax07@mail.ru)

В настоящее время стала актуальна проблема возникновения различных катастроф и стихийных бедствий. Ущерб, наносимый, в частности, природой, достаточно значителен, что заставляет детально изучать причины и следствия стихийных явлений и катастроф. Одной из таких проблем являются огненные смерчи, возникающие при крупных массовых пожарах, при авариях на объектах нефтехимии, а также при крупных массовых пожарах в городах. Целью данной работы является обзор публикаций по физическому и математическому моделированию огненных смерчей и нахождение скорости распространения смерча при экспериментальных данных и при помощи параметров реальных явлений происходящих в мире, а также сравнение этих скоростей.

Было изучено строение смерча и его виды, сделан краткий обзор публикаций по огненному смерчу. Также произведено сравнение скорости распространения огненного смерча экспериментального с реальным смерчем, который был зафиксирован в городе Сан-Пауло в Бразилии. Были получены следующие выводы: Скорость распространения огненных смерчей действительно растет с ростом их высоты  $h$ . Аналогичное влияние на линейную скорость перемещения вихрей оказывает температура  $T_*$ . Более слабое влияние на величину  $v$  оказывают молярные массы окружающей воздушной среды  $M_e$  и продуктов горения  $M_*$  в самом смерче.

### **Экспериментальное исследование возникновения и распространения степного пожара и анализ характеристик пламени фронта степного пожара**

Экспериментальное исследование возникновения и распространения степного пожара и анализ характеристик пламени фронта степного пожара

**Караваев В.В.**  
**Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Лобода Е.Л.**  
Томский государственный университет

В докладе рассмотрены результаты экспериментов по исследованию возникновения и распространения степного пожара. Приводится сравнение изменения скорости ветра от времени и изменения скорости распространения фронта пожара. В докладе сделано сравнение температурных характеристик фронта степного пожара, полученных при помощи термопар и ИК-методами. Проведен анализ и определены значения коэффициентов излучения пламени очагов горения растительных горючих материалов (РГМ).

Известно, что любой очаг горения представляет собой переменную в пространстве и времени высокотемпературную оптическую среду со всеми её оптическими характеристиками. Поэтому при проведении температурных измерений в очагах горения инфракрасными методами возникает проблема получения термодинамических значений температуры [1]. Для получения в динамике качественного инфракрасного изображения пламени и измерения его оптических характеристик применялись тепловизоры со спектральными рабочими диапазонами 3÷5 мкм (Inframetrics-760) и 2.5-2.7 мкм (JADE J530SB) с возможностью регистрации изображений в реальном времени и с радиометрической измерительной функцией.

В докладе приведены сравнения в реперных точках ИК-измерений с термопарными и зависимость коэффициента излучения пламен от влагосодержания РГМ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А.М. Гришин А.А. Долгов, В.В. Рейно, Р.Ш. Цвык «Спектры излучения при горении лесных материалов». Материалы международной конференции «Лесные и степные пожары: возникновение, распространение тушение и экологические последствия». Иркутск, 2001год.

## **Экспериментальные и теоретические исследования зажигания торфа от низового лесного пожара**

Экспериментальные и теоретические исследования зажигания торфа от низового лесного пожара

**Касымов Д. П.**

**Научный руководитель: профессор, д.ф.м.н. Гришин А. М.**

Томский государственный университет



В Российской Федерации торфяные пожары, наряду с лесными и степными пожарами, являются довольно распространенным негативным природным явлением. В частности, в августе и сентябре 2010 года торфяные пожары имели место на огромной территории Европейской части Российской Федерации. Как правило, торфяники горят в засушливый период времени и могут возникать в результате действия низового лесного пожара.

В Томском государственном университете проблемами изучения торфяных пожаров успешно занимаются уже более 30 лет. В частности, была разработана установка по исследованию лесных, степных и торфяных пожаров, на которую был получен патент [1]. Условия перехода низового лесного пожара в торфяной изучены недостаточно, поэтому представляют интерес результаты экспериментальных и теоретических исследований торфяных пожаров.

В работе дается краткое описание экспериментальной установки, подробная схема проведения эксперимента, анализ результатов экспериментальных исследований и приводятся результаты численного решения. Проведены эксперименты по изучению перехода низового лесного пожара в торфяник. На основе экспериментальных данных получена скорость горения вершинного торфа. Установлены критические значения для температуры источника зажигания, при которых период зажигания торфа определяется интенсивностью внешнего очага горения, начальным содержанием окислителя в порох реагента, процессами сушки, пиролиза торфа и экзотермической реакцией окисления оксида углерода. Показано, что результаты численных расчетов по величине скорости тления согласуются с экспериментальными данными.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Патент на изобретение № 237/220. Испытательный комплекс для моделирования лесных, степных и торфяных пожаров / Гришин А. М., Зима В. П., Кузнецов В. Т., Фильков А. И. З-ка № 2008/17660 от 04.05 2008, опубл. 27.10.2009. Бюл. № 30.

## **Тепломассообмен стенки и высокотемпературного газа при наличии вдува жидкости через**

## **пористые материалы**

Тепломассообмен стенки и высокотемпературного газа при наличии вдува жидкости через пористые материалы

**Краснов А.А.**

**Научный руководитель: профессор, д.т.н. Голованов А.Н.**

Томский государственный университет

E-mail: [Koriolan@t-sk.ru](mailto:Koriolan@t-sk.ru)

Известно, что наилучшими теплоизоляционными свойствами обладают пористые материалы. Они широко используются в химической промышленности в термодиффузионных колонках, а в различных химических реакторах как заполнители - в дистилляционных колонках, в металлургической и криогенной промышленности в качестве различного вида теплоизоляций, в пищевой и медицинской промышленности в процессах сушки. Температурный диапазон их применения чрезвычайно широк. Это и парамагнитные соли, используемые при температурах, составляющих сотые доли градуса выше абсолютного нуля, и теплоизоляционные засыпки тугоплавких материалов, работающие при температурах до 3000-4000 градусов К.

Охлаждение жидкостью, испаряющейся внутри нагреваемой пористой стенки, является наиболее перспективным методом тепловой защиты. Однако обнаруженная в первых же экспериментах неустойчивость этой системы задерживает дальнейшее развитие исследований. Для выяснения причины неустойчивости процесса двухфазного пористого охлаждения разработана модель, упрощающая действительный процесс, но сохраняющая его качественные особенности.

Конечная цель исследования — на основе данной модели разработать методику определения таких структурных и теплофизических характеристик, чтобы при известных определяющих параметрах процесса система не только являлась заведомо устойчивой, но ее устойчивость сохранялась и при некоторых заданных возмущениях этих параметров. Причем температура внешней поверхности не должна превышать предельной для безопасной эксплуатации пористого материала.

## **Исследование влияния акустических колебаний на устойчивость теплового смерча.**

Исследование влияния акустических колебаний на устойчивость теплового смерча

**Матвеев И.В.**

Томский Государственный университет

e-mail: [mivvas@mail.ru](mailto:mivvas@mail.ru)

Тепловые смерчи типа торнадо наносят огромный вред окружающей среде и человеку, следовательно, исследование тепловых смерчей актуально [1, 2, 3]. Интерес представляет исследование влияния акустических колебаний на устойчивость теплового смерча [4, 5, 6].

Были проведены серии экспериментов по изучению взаимодействия акустического поля частотой 100, 200, 300 Гц и теплового смерча. Для анализа полученных данных проводилось измерение профилей скорости при помощи ЛДИС ЛАД-05М. По полученным результатам пульсаций скорости рассчитывался коэффициент корреляции между значениями скорости в измеряемых точках и функцией  $\cos(2\pi\nu\Delta t_i)$  ( $\Delta t = 0.00001$ ,  $i = 1 \div 200$ ). В некоторых измеряемых точках, абсолютные значения коэффициента корреляции составляют  $\sim 0.4$  и выше. Следовательно, взаимодействие акустических колебаний с пульсациями скорости газа в смерче носит резонансный характер. Это и приводит к разрушению теплового смерча.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Наливкин Д.В. Ураганы, бури, смерчи. М.: Наука, 1969.
2. Наливкин Д.В. Смерчи. М.: Наука, 1984.
3. Snegirev A.Yu., Mardsen J.A., Fransis J., Makhviladze G.M. Numerical studies experimental observation of whirling flames // International Journal Heat and Mass Transfer 57 (2005) P. 2523-2539.
4. Экспериментальное исследование тепловых и огненных смерчей // Доклады РАН. Т. 400, №5, 2005.
5. Loiseleux T., Chomaz J.M., Huerre P. The effect of swirl on jets and wakes: linear instability of the Rankine vortex with axial flow // Phys. Fluids. – 1998. – Vol. 10, N 5 – P. 1120 – 1134.
6. Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. – Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2003. -504 с.

## **Численное моделирование кристаллизации сферической капли в веерном радиально-коническом сопле**

Численное моделирование кристаллизации сферической капли в веерном радиально-коническом сопле

**Попова А.В.**

**Научный руководитель: доцент, к.ф.м.н. Цимбалюк А.Ф.**

Томский государственный университет

E-mail: [fire@fire.tsu.tomsk.su](mailto:fire@fire.tsu.tomsk.su)

Получение аморфных материалов, традиционно относится к нанотехнологиям, и требует высокой степени охлаждения расплава (порядка  $10^{5-7}$  К/с). В ходе подобного процесса кристаллическая фаза не успевает образоваться и образовавшееся состояние вещества можно трактовать как аморфное (жидкость с очень высокой вязкостью). В подобном состоянии вещество приобретает ряд свойств кардинально отличающихся от имеющих место для обычного кристаллического состояния. Часто такие свойства уникальны. Одним из методов получения аморфных порошков является закалка капель в газовом потоке. Ниже предлагается один из вариантов такого процесса с использованием веерного сопла, особенностью которых является высокая скорость охлаждения газа, что используется, в газодинамических лазерах. Для математического моделирования используется модель гетерогенной газовой динамики, хорошо зарекомендовавшая себя для подобного типа течений. Система уравнений, описывающая движение двухкомпонентного политропного газа, решается методом Годунова. Уравнения движения капли и ее теплообмена с окружающим газом - модифицированным методом Кроу. Рассматривается течение в радиально-коническом сопле, в котором сталкиваются два потока горячий, в котором находятся капли, и холодный. Задача реализована в виде пакета прикладных программ, имеющих дружественный к пользователю интерфейс. Как показали расчеты, что основными определяющими параметрами являются геометрические размеры, в частности ордината места ввода частицы в поток. В процессе моделирования удалось определить исходные параметры задачи, которые позволяют подвести каплю к зоне резкого изменения температуры газа в момент достижения ее материалом температуры близкой к температуре кристаллизации. Это позволило достигнуть в расчетах скоростей охлаждения

порядка  $10^{8-9}$  К/с, что показывает перспективность предлагаемого способа получения аморфных порошков.

## **Аэродинамика колеблющегося конуса в набегающем сверхзвуковом потоке**

Аэродинамика колеблющегося конуса в набегающем сверхзвуковом потоке

**Пахомов Ф.М., Репало Е.Н.**

Томский государственный университет

634050, г. Томск, пр. Ленина, 36

Тел./факс: (3822) 529669, e-mail: [fire@mail.tsu.ru](mailto:fire@mail.tsu.ru)

С использованием модели идеального невязкого совершенного газа исследуются аэродинамические характеристики колеблющегося конуса при нестационарном осесимметричном сверхзвуковом обтекании в отсутствие и при наличии сильного вдува воздуха с поверхности торцевого затупления в ударный слой.

Малые низкочастотные продольные колебания обтекаемого сверхзвуковым потоком тела не приводят к ожидаемому уменьшению силы его сопротивления, а, скорее наоборот, ухудшают эго аэродинамические качества.

Сильный локализованный вдув с поверхности не оказывает влияние на характер взаимодействия колеблющегося тела со сверхзвуковым потоком.